

MATHS

Terminale A4



Table des matières

CHAPITRE I : EQUATIONS-INEQUATIONS, SYSTEMES.....	2
I. équation et inéquation du type : $ax + b$ (1 ^{er} degré).....	2
A- équations.....	2
B- inéquations.....	3
C- équation et inéquation du second degré.....	5
D- équations et inéquations du degré 3 (ordre 3).....	9
E- équations et inéquations bicarrées.....	12
E1. équations bicarrées.....	12
F- équations et inéquations liant deux fractions rationnelles.....	15
CHAPITRE 2 : ETUDE DE FONCTION.....	17
I. Rappels sur la Notion de limites et de continuité.....	17
II. notion de dérivée.....	25
III. étude de fonction.....	31
A- parité :.....	31
B. fonction logarithme népérien.....	32
C. fonction exponentielle.....	37
IV. Equation – Inéquations.....	38
V. étude graphique de la fonction exponentielle.....	39
CHAPITRE 3 : PROBABILITE.....	41
I. dénombrement.....	41
II. Outils d'Analyse Combinatoire.....	42
III. probabilité.....	44
Bibliographie.....	1

CHAPITRE I : EQUATIONS-INEQUATIONS, SYSTEMES

I. équation et inéquation du type : $ax + b$ (1^{er} degré)

A- équations

Une équation de la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des nombres réels est appelée équation du 1^{er} degré ou équation d'ordre 1. Cette équation admet :

- Une solution unique si $a \neq 0$ Cette solution est $\frac{-b}{a} \Rightarrow S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$
 - Aucune solution si $a = 0$ et $b \neq 0 \Rightarrow S = \emptyset$
- Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $-3x + 2 = 0$

b) $x + 1 = x - 2$

c) $4x + 6 = 0$

d) $3x - 1 = 0$

e) $2(x - 1) + 3(x + 1) = x - 1$

Solution

a) $-3x + 2 = 0 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

b) $x + 1 = x - 2 \Rightarrow x - x + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0x - 1 = 0; a = 0 \Rightarrow$

$$S = \emptyset$$

c) $4x + 6 = 0 \Rightarrow 4x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{4} \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \Rightarrow$

$$S = \left\{ \frac{-3}{2} \right\}$$

d) $3x - 1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow X = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$e) \left\{ \begin{array}{l} 2(x - 1) + 3(x - 1) = x - 1 \\ \Rightarrow 2x - 2 + 3x - 1 = x - 1 \\ \Rightarrow 5x - x - 3 + 1 = 0 \\ \Rightarrow 4x - 2 = 0 \quad 4x = 2 \quad x = \frac{2}{4} \quad x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

B- inéquations

Pour résoudre les inéquations du premier degré, il suffit d'étudier le signe du polynôme

$P(x) = ax + b$. Pour ce fait, on détermine une racine de P. C'est-à-dire une solution de l'équation $P(x) = 0$

$$P(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \quad x = \frac{-b}{a}$$

X	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b (a \neq 0)$	Signe contraire du signe de a		Signe de a

Exemple : Résoudre les inéquations :

a) $x + 1 \geq 0$

b) $1 - x \geq 0$

c) $2x - 1 < 0$

d) $2x + 4 > 0$

e) $2(x - 1) > x + 1$

Solution

1^{ère} Méthode: $x + 1 \geq 0$
 $\Rightarrow x \geq -1$

$$S = [-1; +\infty[$$

2^{ème} Méthode: $x + 1 \geq 0$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

X	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	-		+

$$S = [-1; +\infty[$$

b) $1 - x \geq 0$

1^{ère} Méthode: $1 - x \geq 0$

$$\Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$$

$$S =]-\infty; 1]$$

2^{ème} Méthode: $1 - x \geq 0$

$$\Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1 - x$	+	-	

$$S =]-\infty; 1]$$

c) $2x - 1 < 0$

1^{ère} Méthode: $2x - 1 < 0$

$$\Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$S = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$$

2^{ème} Méthode: $2x - 1 < 0$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	+	-	

$$S = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$$

d) $2x - 4 > 0$

1^{ère} Méthode: $2x - 4 > 0$

$$\Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > \frac{4}{2} \Rightarrow x > 2$$

$$S =]2; +\infty [$$

2^{ème} Méthode: $2x - 4 > 0$

$$\Rightarrow 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2$$

X	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x - 4$	-	+	

$$S =]2; +\infty [$$

$$e) 2(x - 1) > (x + 1)$$

$$\Rightarrow 2x - 2 > x + 1$$

$$\Rightarrow 2x - x - 2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow x - 3 > 0$$

$$\Rightarrow x > 3$$

$$\boxed{S =] 3; +\infty [}$$

C- équation et inéquation du second degré

1- équation

On considère le polynôme P définie par

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0 \text{ Où } a, b, c \text{ sont des réels}$$

Résoudre l'équation $P(x)=0$ revient à déterminer au préalable les racines de P afin de déterminer la forme factorisée.

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad P = \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

On pose: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta < 0$ alors P n'est pas factorisable, d'où $S = \emptyset$
- Si $\Delta = 0$ alors P a une racine unique $\frac{-b}{2a}$ et $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ d'où $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
- Si $\Delta > 0$ alors P a 2 racines distincts x_1 et x_2 telles que :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

D'où la forme factorisée de P est $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$S = \{x_1; x_2\}$$

NB : Le nombre réel Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant du polynôme P.

Exemple : Résoudre les équations suivantes :

$$1) x^2 - x - 6 = 0$$

$$2) x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$3) -x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$4) 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$5) x^2 + x - 12 = 0$$

$$6) 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(x - 5)$$

Solution

$$1) x^2 - x - 6 = 0$$

On pose: $\Delta = 1 + 24$

$$\Delta = 25$$

$$\Delta = 5^2$$

$$X_1 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} ; X_1 = -2$$

$$X_2 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} ; X_2 = 3$$

$$S = \{-2; 3\}$$

$$1) x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\text{On pose: } \Delta = 4 - 12$$

$$\Delta = -8$$

$$\Delta < 0 \text{ donc } S = \emptyset$$

$$3) -x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\text{On pose } \Delta = 9 - 20$$

$$= -11$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$$4) 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1$$

$$S = \{1\}$$

$$5) x^2 + x - 12 = 0$$

$$\text{On pose: } \Delta = 1 + 48$$

$$\Delta = 49$$

$$\Delta = 7^2$$

$$x_1 = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$S = \{-4; 3\}$$

$$6) 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)(x-5)$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 2x^2 - 10x + x - 5$$

$$4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 + 9x + 5 = 0$$

$$2x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$\text{On pose: } \Delta = 13^2 - 4 \times 12$$

$$\Delta = 169 - 48$$

$$\Delta = 121$$

$$\Delta = 11^2$$

$$\Delta = 11^2$$

$$x_1 = \frac{-13-11}{4} = -6 \quad x_2 = \frac{-13+11}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$S = \{-6; \frac{-1}{2}\}$$

Remarque: Le calcul de Δ n'est pas toujours indispensable pour résoudre une équation du 2nd degré. Par exemple l'équation : $2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x+5) = 0$

$$\Leftrightarrow S = \{0; \frac{-5}{2}\}$$

Quelque fois on peut simplifier les calculs en posant $b' = \frac{b}{2}$ et $\Delta' = b'^2 - ac$ (discriminant réduit)

- Si $\Delta' < 0 \Rightarrow$ pas de racine
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ racine double : $x_0 = \frac{-b'}{a}$
- Si $\Delta' > 0 \Rightarrow$ deux racines $x_1 = \frac{-b' - \Delta'}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' + \Delta'}{a}$

2- inéquations

Pour résoudre une inéquation du 2nd degré, il suffit d'étudier le signe du polynôme $P(x)$.

Pour étudier le signe de $p(x)$, on calcule son discriminant et on utilise l'un des tableaux suivants :

- Si $\Delta' < 0$, P n'a pas de racine

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double alors $P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a		Signe de a

- Si $\Delta > 0$ alors P a 2 racines distincts et la forme factorisée de P est $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x-x_1$	-	+	+	
$x-x_2$	-	-	+	
$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$	Signe de a		Signe contraire de a	Signe de a

L'étude de signe du polynôme P permet de résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

Exemple : Dans chacun des cas suivants, étudier le signe du polynôme P et en déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

- $P(x) = -2x^2 - 4x + 6$
- $P(x) = 3x^2 - 6x + 3$
- $P(x) = -x^2 + 3x - 5$
- $P(x) = (2x-3)(x+5)$

Solution

$P(x) = -2x^2 - 4x + 6$ on pose : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-2)(6)$$

$$\Delta = 16 + 48$$

$$\Delta = 64$$

$$\Delta = 8^2$$

$\Delta > 0$, donc P a deux racines distinctes qui sont : $X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{4-8}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{4+8}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$$

La forme factorisée de P est : **P(x) = -2(x-1)(x+3)**

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
X+3	-	+	+	
x-1	-	-	+	
(x-1)(x+3)	+	-	+	
-2(x-1)(x+3)	-	+	-	

$$S =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

b) $P(x) = 3x^2 - 6x + 3$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(3) \times (3)$$

$$\Delta = 36 - 36$$

$$\Delta = 0$$

Donc P admet une racine double: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$

La forme factorisée de P est : **P(x) = 3(x-1)² = 3(x-1)(x-1)**

Tableau de signe

X	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-	+	
x-1	-	+	
(x-1) ²	+	+	
3(x-1) ²	+	+	

$$S = \{1\}$$

c) $P(x) = -x^2 + 3x - 5$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (3)^2 - 4(-1) \times (-5)$$

$$\Delta = 9 - 20$$

$$\Delta = -11$$

$\Delta < 0$, P n'a pas donc de racine. P(x) est toujours du même signe que a = -1

D'où le tableau

X	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	-	

$$S = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty [$$

d) $P(x) = (2x-3)(x+5)$

On a déjà la forme factorisée de P et les 2 racines sont : -5 et $\frac{3}{2}$

Tableau de signe

X	$-\infty$	-5	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
X+5	-	+	+	
2x-3	-	-	+	
P(x)	+	-	+	

$$S = [-5 ; \frac{3}{2}]$$

D- équations et inéquations du degré 3 (ordre 3)

On considère le polynôme P tel que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Pour résoudre une inéquation de type $P(x) = 0$ ou une inéquation de type $P(x) \geq 0$ ou $P(x) \leq 0$; il faut :

- Rechercher une racine évidente de P si elle, existe puis déterminer un polynôme du 2nd degré Q tel $P(x) = (x - \alpha) Q(x)$. Le calcul des coefficients de Q peut être fait à partir de l'égalité des polynômes (identification) ou par division Euclidienne ou encore par la méthode de Horner.
- Dresser le tableau de signe de p(x) et en déduire les solutions de l'équation donnée impliquant P.

Exemple : On considère le polynôme P définie par :

$$P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$$

a) Vérifier que (2) est une racine de P.

b) Déterminer un polynôme Q tel que $P(x) = (x-2) Q(x)$

c) Résoudre $P(x) = 0$

d) Résoudre $P(x) \geq 0$ et $P(x) < 0$

Solution

$$P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$$

a) Vérifions que 2 est racine :

$$P(2) = -2(2^3) + (3) \times 2^2 + 5 \times 2 - 6$$

$$P(2) = -16 + 12 + 10 - 6$$

$$P(2) = -22 + 22$$

$$P(2) = 0 \quad \text{d'où } 2 \text{ est racine de } P.$$

b) Déterminons un polynôme Q

Procédons par division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
 -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6 & x - 2 \\
 +2x^3 - 4x^2 & -2x^2 - x + 3 \\
 \hline
 -x^2 + 5x - 6 & \\
 +x^2 - 2x - 6 & \\
 \hline
 3x - 6 & \\
 -3x + 6 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Méthode de Horner

	-2	3	5	-6
2		-4	-2	6
	-2	-1	3	0
	a	B	C	

$$\text{D'où } P(x) = (x-2)(-2x^2 - x + 3)$$

c) Résolvons $P(x) = 0$

$$(x-2)(-2x^2 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \quad \text{ou} \quad -2x^2 - x + 3 = 0 \quad a=-2, b=-1, c=3$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-2) \times (3)$$

$$\Delta = 1 + 24$$

$$\Delta = 25$$

$$\Delta = 5^2$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{1-5}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{1+5}{-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}; 1; 2 \right\}$$

d) Résoudre $P(x) \geq 0$ et $P(x) < 0$

$$P(x) = -2(x-2)(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Tableau de signe :

X	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	2	$+\infty$
$(x + \frac{3}{2})$	-	+	+	+	
$(x-1)$	-	-	+	+	
$(x-2)$	-	-	-	+	
$(x-2)(x-1)(x + \frac{3}{2})$	-	+	-	+	
$-2(x-2)(x-1)(x + \frac{3}{2})$	+	-	+	-	

$$P(X) \geq 0 \Rightarrow S =]-\infty; \frac{3}{2}] \cup [1; 2]$$

$$P(x) < 0 \Rightarrow S =] \frac{3}{2}; 1[\cup] 2; +\infty [$$

Exercice d'Application

On considère le polynôme P de définie par : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

a) Vérifier que $P(-2) = 0$

b) En déduire un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x) = (x+2) Q(x)$

c) Factoriser Q(x)

d) Etudier le signe de P(x)

e) En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$

Résolution

Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

a) Vérifions que $P(-2) = 0$

$$P(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 4(-2) + 12$$

$$P(-2) = -8 + 12 + 8 + 12$$

$$P(-2) = 0$$

b) Déduisons en Q(x)

Procédons par la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - 4x + 12 & x + 2 \\ -x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x + 6 \\ \hline -5x^2 - 4x + 12 & \\ +5x + 10x & \\ \hline 6x + 1 & \\ -6x - 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Donc : } P(x) = (x+2)(x^2 - 5x + 6)$$

c) Factorisons Q(x)

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$a=1 ; b=-5 ; c=6$$

$$\text{On pose: } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Donc $Q(x) = (x-2)(x-3)$

d) Etudions le signe de $P(x)$

$$P(x) = (x+2)(x-2)(x-3)$$

D'où le tableau de signe

x	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$
x+2	-	+	+	+	
x-2	-	-	+	+	
x-3	-	-	-	+	
P(x)	-	+	-	+	

e) Les solutions de $P(x) \leq 0$

$$\Rightarrow S =]-\infty; -2] \cup [2; 3]$$

E- équations et inéquations bicarrées

E1. équations bicarrées

On considère un polynôme P tel que $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Pour résoudre une équation de type $P(x) = 0$, on procède par un changement de variable en posant $X = x^2$ pour ramener l'expression $ax^4 + bx^2 + c$ à une expression du 2nd degré de variable X . L'équation $ax^4 + bx^2 + c$ est appelée une équation bicarrée.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :

a) $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$

b) $X^4 - 6x^2 + 9 = 0$

c) $X^4 + x^2 + 2 = 0$

d) $X^4 - 4x^2 + 3 = 0$

Résolution

a) $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$ Posons : $X = x^2$;

L'équation devient: $2X^2 + 5X - 3 = 0$ $a=2$; $b=5$; $c=-3$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (5)^2 - 4(2)(-3)$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(2)(-3)$$

$$\Delta = 25 + 24 \quad \Delta = 49$$

$$\Delta = 7^2$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$X_1 = -3 \text{ ou } X_2 = \frac{1}{2} \text{ or } X = x^2$$

Donc: $x^2 = -3$, impossible

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; +\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

b) $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ posons : $X = x^2$, L'équation devient: $X^2 - 6X + 9 = 0$; $a=1$; $b=-6$; $c=9$

$$\text{On pose: } \Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (-6)^2 - 4 \times 9$$

$$\Delta = 36 - 36$$

$$\Delta = 0 ; \text{ on a une racine double : } X = \frac{6}{2} = 3$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = +\sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \quad S = \{-\sqrt{3}; +\sqrt{3}\}$$

c) $x^4 + x^2 + 2 = 0$ on pose $X = x^2$

$$X^2 + X + 2 = 0 \quad a=1 ; b=1 ; c=2$$

$$\text{On pose: } \Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2$$

$$\Delta = -7 ; \Delta < 0 \text{ donc } S = \emptyset$$

e) $X^4 - 4X + 3 = 0$ on pose $X = x^2$

$$X^2 - 4X + 3 = 0 \quad a=1 ; b=-4 ; c=3$$

$$\text{On pose: } \Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3$$

$$\Delta = 16 - 12$$

$$\Delta = 4 = 2^2$$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} ; x = +\sqrt{3}$$

$$S = \{-\sqrt{3}; -1; 1; +\sqrt{3}\}$$

e2. Inéquations

Pour résoudre une inéquation bicarrée, on procède par le même chemin en posant $x^2 = X$; puis on étudie le signe du polynôme.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$$

$$\text{Posons } X = x^2 \Rightarrow X^2 - 5X + 4 \leq 0 \quad a=1 ; b=-5 ; c=4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$\Delta = 25 - 16$$

$$\Delta = 9 \Rightarrow \Delta = 3^2 \text{ d'où le polynôme admet deux racines distinctes}$$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 ; x = +2$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
X+2	-	+	+	+	+	
X+1	-	-	+	+	+	
x-1	-	-	-	+	+	
X+1	-	-	-	-	+	
P(x)	+	-	+	-	+	

$$P(x) \leq 0 \Rightarrow S = [-2; -1] \cup [1; 2]$$

b) $2x^4 - 5x + 7 \leq 0$ on pose $X = x^2$

$$2X^2 - 5X + 7 \leq 0 \quad a=2; b=-5 ; c=7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$$

$$\Delta = -39$$

$\Delta < 0$ donc le signe est celui de a ; a est positif.

x	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	+	

$$P(x) \leq 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

c) $-3x^4 + 6x^2 - 3 \leq 0$ on pose $X = x^2$

$$-3X^2 + 6X - 3 \leq 0 \quad a=-3 ; b=6 ; c=-3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (6)^2 - 4(-3) \times (-3)$$

$$\Delta = 36 - 36 \Rightarrow \Delta = 0 \quad \text{donc P a une racine double} \quad x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$P(x) = -3(X-1)^2$$

$$P(x) \leq 0 \Rightarrow -3(X-1)^2 \leq 0 \quad \text{Or } X = x^2$$

$$\Rightarrow -3[(x-1)(x+1)]^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow -3(x-1)^2(x+1)^2 \leq 0$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
-3	-	-	-	
$(x+1)^2$	+	+	+	
$(x-1)^2$	+	+	+	
$-3(x-1)^2(x+1)^2$	-	-	-	

S=IR

F- équations et inéquations liant deux fractions rationnelles

F1. Équations

Soit P, Q, R et S quatre polynômes. Les équations liant deux fractions sont de la

forme : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$

Résoudre de telles équations revient à résoudre l'équation : $P(x) \times S(x) = R(x) \times Q(x)$,
avec $Q(x) \neq 0$ et $S(x) \neq 0$

Exemple : Résoudre dans IR :

a) $\frac{1}{x-2} = \frac{x-7}{x-2}$

Condition d'existence :

L'équation existe si et seulement si $x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$; Le domaine d'existence est **IR/ {2}**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} = \frac{x-7}{x-2} &\Leftrightarrow x-2 = (x-2)(x-7) \\ &\Leftrightarrow (x-2) - (x-2)(x-7) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(-x+8) = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow X=2$ ou $x=8$ or 2 n'appartient pas au domaine de définition donc **S= {8}**

Exercice d'application

b) Résoudre dans IR : $\frac{3-2x}{4x+5} = 0$; $\frac{x-1}{x+1} = \frac{-2x+3}{x-2}$; $\frac{3x+3}{4} + 2x = \frac{3x+5}{2}$

Inéquation de type : $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq \frac{R(x)}{S(x)}$

Pour résoudre une inéquation liant 2 fractions rationnelles :

- On détermine la condition d'existence ;
- On établit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{S(x)}$ puis on étudie le signe de $f(x)$ après avoir réduit au même dénominateur.

Attention : $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{R(x)}{S(x)}$ n'est pas équivalent à $P(x) \times S(x) \leq R(x) \times Q(x)$.

c) Exemple : Résoudre dans IR $\frac{2x-5}{x+1} \leq \frac{1-3x}{x-3}$

L'inéquation existe si et seulement si : $x+1 \neq 0$ et $x-3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq 3 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x-5}{x+1} \leq \frac{1-3x}{x-3} &\Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+1} - \frac{1-3x}{x-3} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2x-5)(x-3) - (x+1)(1-x)}{(x+1)(x-3)} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2-9x+14}{(x+1)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow 5x^2-9x+14 \leq 0 \text{ on pose } \Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-9)^2 - 4 \times 5 \times 14$$

$$\Delta = -199 < 0$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$5x^2-9x+14$	+	+	+	
$X+1$	-	+	+	
$x-3$	-	-	+	
$F(x)$	+	-	+	

$$S =]-1; 3[$$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\frac{-x+3}{x+1} < \frac{x-2}{x-4}$

b) $\frac{-5x+4}{x+1} < 1$

c) $\frac{x-1}{x+3} > 0$

d) $\frac{x-2}{3x+1} \leq \frac{1-x}{x+2}$

CHAPITRE 2 : ETUDE DE FONCTION

I. Rappels sur la Notion de limites et de continuité

1. Limites de référence :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a = a$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a = a$
	$\lim_{x \rightarrow b} a = a$

Exemple: Calculer les limites suivantes:

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1}; \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} (x+1); & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-2}; & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x); & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 \end{array}$$

Résolution

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3; & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{-1}{2}; & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty; & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty \end{array}$$

Limite des fonctions polynômes et fonctions rationnelles

A retenir :

- ✓ La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 + 3x^2 + 1$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 1$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + x^2 + 1$

Resolution

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 + 3x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 = +\infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$

✓ La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : Calculer les limites suivantes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2} \right) = \frac{2}{3}$

Attention : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}{3 \cdot 0^2 - 1} = -2$

Limite à gauche, limite à droite

Elle se calcul à gauche et à droite de la valeur interdite du domaine de définition.

Exemple: Calculer la limite à gauche et à droite dans chacun des cas suivants :

a) $F(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ a = -1

b) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$ a = 2

Calculons la limite à gauche et à droite :

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(-1)-1}{0^-} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(-1)-1}{0^+} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

Utilisation du tableau du signe

x	$-\infty$	1	$+\infty$
-4	-		-
X+1	-		+
	+		-

D'où $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \frac{2^2-2 \cdot 2+3}{0^+} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \frac{2^2-2 \cdot 2+3}{0^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

Utilisation du tableau de signe

x	$-\infty$	2	$+\infty$
3	+		+
x-2	-		+
	-		+

D'où $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

1.2. notion d'asymptotes

a- asymptotes parallèles aux axes du repère

A RETENIR : Lorsqu'une fonction admet pour limite un nombre réel a en $+\infty$ ou en $-\infty$; alors la droite d'équation $y = a$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction.

Exemple : Calculer la limite en l'infini de f et en déduire d'éventuelles asymptotes.

a) $F(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$ b) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

Solution

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

Donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote Horizontale à la courbe (C_f).

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-6}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-6}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0$$

Donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe (C_f).

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

Donc il n'existe pas d'asymptote horizontale.

- Lorsqu'une fonction admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ à gauche ou à droite en x_0 ; alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe.

Exemple : Calculer les limites à gauche et à droite et en déduire d'éventuelles asymptotes :

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad a=-1; \quad \text{b) } f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad a=2$$

Solution:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{-2}{0^-} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{-2}{0^+} \right) = -\infty$$

Donc la droite d'équation $X = -1$ est asymptote à (C_f).

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3x-2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{4}{0^-} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3x-2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{4}{0^+} \right) = +\infty$$

Donc la droite d'équation $X=2$ est asymptote à (C_f).

b- Asymptote Oblique

A RETENIR : soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative. Lorsqu'il existe une quantité $y = ax + b$ telle que : $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote

Oblique de (C) .

Exercice d'application

- 1- Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 2}$
- a) Déterminer l'ensemble de définition de f
 - b) Calculer les limites aux bornes de D_f .
 - c) Déterminer 3 réels a , b , et c tels que $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$
 - d) Démontrer qu'il existe une asymptote oblique à (C_f) .
- 2- Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition et calculer les limites aux bornes du domaine.
- a) $f(x) = x + 1$;
 - b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$;
 - c) $f(x) = \frac{1}{x}$;
 - d) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$;
 - e) $f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$;
 - f) $f(x) = \frac{-x^3 + x + 1}{x + 1}$

Solution

- 1- Soit $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 2}$
- a) Déterminons le domaine de définition
 f existe si et seulement si : $x + 2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

$$D_f = \mathbb{R} / \{-2\}$$

- b) Calculons les limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2+3x-1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-4-6-1}{0^-} \right) = \frac{-11}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-4-6-1}{0^+} \right) = \frac{-11}{0^+} = -\infty$$

Donc la droite d'équation $X = -2$ est asymptote verticale

c) Déterminons trois réels a , b , et c

→ Par identification :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax+b + \frac{c}{x+2} \rightarrow f(x) = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} \\ &\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} \\ &\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} \\ &\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+x(2a+b)+2b+c}{x+2} \end{aligned}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 - 2a = 5 \\ c = 1 - 2b = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a = -1} \\ \mathbf{b = 5} \\ \mathbf{c = -9} \end{cases}$$

$$f(x) = -x + 5 - \frac{9}{x+2}$$

→ Par division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} -x^2+3x+1 & x+2 \\ +x^2+2x & -x+5 \\ \hline 5x+1 & \\ -5x-10 & \\ \hline -9 & \end{array}$$

$$\text{D'où : } f(x) = -x + 5 + \frac{(-9)}{x+2} \rightarrow f(x) = -x + 5 - \frac{9}{x+2}$$

d- Démontrons qu'il existe une asymptote horizontale :

Posons : $y = -x+5$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[(-x+5) - \frac{9}{x+2} - (-x+5) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{9}{x} = 0$$

D'où la droite d'équation : $y = -x+5$ est une asymptote oblique.

2) Déterminons le domaine de définition et calculons les limites aux bornes de D_f :

a) $f(x) = x+1$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3) = +\infty$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

f existe si et seulement si:

$x \neq 0 \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ou } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x}) = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x}) = \frac{1}{+\infty} = 0$

Donc la droite (D) : $y = 0$ est asymptote horizontale

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\frac{1}{x}) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x}) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc la droite (D) : $x = 0$ est asymptote verticale.

d) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

f existe si et seulement si : $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ ou } D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x+1}) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1^+} = +\infty$$

Donc la droite (D) : $X = 0$ est asymptote verticale.

$$e) f(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

f existe si et seulement si : $x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$

$$\mathbf{D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 3 \} \text{ ou } \mathbf{D_f =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

Donc la droite (D) : $y = 1$ est asymptote horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{3-2}{0^-}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{3-2}{0^+}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc la droite (D) : $X = 3$ est asymptote vertical.

$$f) f(x) = \frac{-x^3+x^2+1}{x+1}$$

f existe si et seulement si : $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$$\mathbf{D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -1 \} \text{ ou } \mathbf{D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \left(\frac{-(-1)^3+(-1)^2+1}{0^-}\right) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \left(\frac{-(-1)^3+(-1)^2+1}{0^+}\right) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow -1^+$$

Donc la droite **(D) : X = -1** est asymptote verticale.

II. notion de dérivée

Définition : Soit f une fonction

L'ensemble des nombres réels en les quels f est dérivable, est appelé *ensemble de dérivabilité*

La fonction $x \rightarrow f'(x)$ est appelé dérivée (ou fonction dérivée) de f

2.1. Dérivées des fonctions élémentaires

$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	Ensemble de dérivée
$f(x)$	$f'(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$F(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$

Exemple : $f(x) = 2 \rightarrow f'(x) = 0$

$$f(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 2$$

$$f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x = x \rightarrow f'(x) = x$$

2.2. Dérivée et opération sur les fonctions

Fonction mère	Dérivée
$F(x)$	$F'(x)$
$k.U(x), k \in \mathbb{R}^*$	$k.U'(x) \quad k \in \mathbb{R}^*$
$U(x) + V(x)$	$U'(x) + V'(x)$
$U(x) \times V(x)$	$U'(x)V(x) + V'(x)U(x)$
$\frac{1}{U(x)}$	$\frac{-U'(x)}{U(x)^2}$
$\frac{U(x)}{V(x)}$	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$
$U(x)^n$	$nU' \cdot U^{n-1}$
$\sqrt{U(x)}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée

- a) $f(x) = -x$
- b) $f(x) = 2x^2$
- c) $f(x) = \frac{-3}{x}$
- d) $f(x) = 2\sqrt{x}$
- e) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$
- f) $f(x) = 2x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 3$
- g) $f(x) = \frac{1}{x+2}$
- h) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
- i) $f(x) = \frac{3x}{x+2}$
- j) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$
- k) $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$
- l) $F(x) = (x+1)^6$
- m) $F(x) = (x^2-2)^3$

Solution

a) $f(x) = -x \quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -1$

$$b) f(x) = 2x^2 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4x$$

$$c) f(x) = \frac{-3}{x} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -3 \times \left(\frac{1}{x}\right)' \rightarrow f'(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$d) f(x) = 2\sqrt{x} \quad D_f = [0; +\infty[$$

$$f'(x) = 2 \times (\sqrt{x})'$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$e) f(x) = 2x^2 - 3x - 5 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (2x^2)' - (3x)' - (5)'$$

$$f'(x) = 4x - 3$$

$$f) 2x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 3 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (2x^4)' + \left(\frac{4}{3}x^3\right)' - (x^2)' + (3)'$$

$$f'(x) = 8x^3 + 4x^2 - 2x$$

$$g) f(x) = \frac{1}{x+2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$U = x+2 \rightarrow U' = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{U^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$h) f(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$U = x^2-1 \rightarrow U' = 2x$$

$$f'(x) = \frac{-U'}{U^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$i) f(x) = \frac{3x}{x+2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$U = 3x \rightarrow U' = 3$$

$$V = x+2 \rightarrow V' = 1$$

$$f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - 1(3x)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$$

$$j) f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$U = 3x^2-2x+1 \rightarrow U' = 6x-2$$

$$V = x-2 \rightarrow V' = 1$$

$$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{U^2}$$

$$f'(x) = \frac{(6x-2)(x-2)-1(3x^2-2x+1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2-12x-2x-2x+4-3x^2+2x-1}{(x-2)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2-12x+3}{(x-2)^2}$$

$$k) f(x) = \frac{x+1}{2-x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$U = x+1 \rightarrow U' = 1$$

$$V = 2-x \rightarrow V' = -1$$

$$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{V^2}$$

$$f'(x) = \frac{1(2-x)-(-1)(x+1)}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{(2-x)^2}$$

$$l) f(x) = (x^2-2)^3 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{Posons: } U = x^2-2 \rightarrow U' = 2x$$

$$f'(x) = (U^n)' = nU'U^{n-1}$$

$$f'(x) = 3 \times (2x) \times (x^2-2)^2 \rightarrow f'(x) = 6x(x^2-2)^2$$

2. 3. Dérivée et application

a- Sens de variation d'une fonction

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction, nous déterminons le signe de la dérivée sur l'ensemble de définition :

- ✓ Si $f'(x)$ est positive sur une partie(ou l'intégralité) de l'ensemble alors f est croissante (Strictement croissante).
- ✓ Si $f'(x)$ est négative sur une partie de cet ensemble (ou l'intégralité), alors f est décroissante (strictement décroissante) sur cet ensemble.
- ✓ Si f' est nulle alors, on dit que f est constante.

Remarque : Etudier les variations d'une fonction revient à dresser le tableau de signe et le tableau de variation.

Exemple : Etudier les variations des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = x^3-3x-1$$

$$b) f(x) = 2x^2-x+4$$

$$c) f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x}$$

Solution

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1 \quad D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 1) \rightarrow f'(x) = 3(x-1)(x+1)$$

$$\text{posons } f'(x) = 0 \rightarrow 3(x-1)(x+1) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Tableau de variation

X	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x+1	-	+	+	
x-1	-	-	+	
f'(x)	+	-	+	
f(x)	$-\infty$	$f(-1)=1$	$f(1)=-3$	$+\infty$

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup [1 ; +\infty[, f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]-\infty ; -1[\cup [1 ; +\infty[$;

$\forall x \in]-1 ; 1[, f'(x) < 0$ d'où f est décroissante sur $]-1 ; 1[$.

b) $f(x) = 2x^2 - x + 4 \quad D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x - 1 ; f'(x) = 0 \rightarrow 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Tableau de variation

X	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x) = 4x - 1$	-	+	
f(x)	$+\infty$	$f(\frac{1}{4})$	$+\infty$

$\forall x \in]-\infty ; \frac{1}{4} [, f'(x) < 0$ d'où f est décroissante sur $]-\infty ; \frac{1}{4} [$;

$\forall x \in]\frac{1}{4} ; +\infty [, f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]\frac{1}{4} ; +\infty [$.

c) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Calcul de la dérivée :

$$U = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow U' = 6x - 2$$

$$V = x - 2 \rightarrow V' = 1$$

$$f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(6x-2)(x-2) - (6x-2)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 20x + 6}{(x-2)^2}$$

$\forall x \in D_f, (x-2)^2 > 0$ donc f' est du signe du numérateur

$$6x^2 - 20x + 6 = 0 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Delta' = (5)^2 - 9 \rightarrow \Delta' = 16$$

$$\Delta' = 4^2$$

$$X_1 = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}; \text{ et } X_2 = \frac{5+4}{3} = 3$$

$$f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3)$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	2	3	$+\infty$
$x - \frac{1}{3}$	-	+		+	
$x-3$	-	-		-	+
$f'(x)$	+	-		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$		$f(3)$	$+\infty$

$\forall x \in]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]3; +\infty[, f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]3; +\infty[$;

$\forall x \in]\frac{1}{3}; 2[\cup]2; 3[; f'(x) < 0$ d'où f est décroissante sur $] \frac{1}{3}; 2[\cup]2; 3[$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$\forall x \in D_f, \frac{-1}{x^2} < 0$ d'où f est strictement décroissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	0		0

b- Détermination d'une équation de la tangente au point d'abscisse x_0

La courbe d'une fonction peut atteindre en un point M_0 d'abscisse x_0 une tangente dont l'équation est donnée par :

$$(T) : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Exemple : Soit $f(x) = x^2+2x+3$

- a) Calculer la dérivée de $f(x)$
- b) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 3

Solution

- a) Calcul de la dérivée
 $f'(x) = 2x+2$
- b) Une équation de la tangente au point d'abscisse 3

$$(T) : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$X_0 = 3 \rightarrow f'(3) = 2 \times 3 + 2 \quad f'(3) = 8 \text{ et } f(3) = 3^2 + 2 \times 3 + 3 = 18$$

$$\text{Donc : } (T) : y = 8(x-3) + 18$$

$$Y = 8x-24+18 \quad (T): y = 8x-6$$

2. 4. Dérivées successives

Une fonction peut être dérivée plusieurs fois. La première dérivée de f est f' . La 2^{ème} dérivée de f est f'' ; la 3^{ème} dérivée de f est f''' ou f^3 . La n -ième dérivée de f est f^n .

Exemple : Calculer les trois premières dérivées des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = 3x^2-2x+1$
- b) $g(x) = 3x^3-6x^2+x-3$

Solution

- c) $f(x) = 3x^2-2x+1$
 $f'(x) = 6x-2+0$
 $f''(x) = 6$
 $f'''(x) = 0$
- d) $g(x) = 3x^3-6x^2+x-3$
 $g'(x) = 9x^2-12x+1$
 $g''(x) = 18x-12$
 $g^3(x) = 18$
 $g^4(x) = 0$

III. étude de fonction

A- parité :

Une fonction est dite paire si et seulement si son ensemble de définition est symétrique par rapport à O.

$$\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$$

Exemple: $f(x) = x^2 + 1$

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$$

Donc la fonction f est paire.

Une fonction est dite impaire si son ensemble de définition est symétrique par rapport à O et $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

2- Centre de symétrie

Pour démontrer qu'un point $A\left(\frac{a}{b}\right)$ est centre de symétrie, il suffit de démontrer

$$\text{que : } \frac{f(a-h) + f(a+h)}{b} = 2 \Leftrightarrow f(a-h) + f(a+h) = 2b$$

3- Axe de symétrie

Pour démontrer qu'une droite $X = a$ est axe de symétrie alors il suffit juste de prouver que : $f(a-h) = f(a+h)$

B. fonction logarithme népérien

Définition : On appelle fonction logarithme népérien, la fonction notée $\ln x$ définie sur $]0 ; +\infty[$, qui s'annule en 1.

Propriété fondamentale de la fonction logarithme

La fonction logarithme népérien est caractérisée par trois propriétés fondamentales qui sont:

- Son domaine de définition $]0 ; +\infty[$
- $\ln(1) = 0$ (racine évidence)
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (dérivée)

a) Ensemble de définition de fonction composé avec $\ln$: $\ln U$

La fonction $\ln U$ existe si et seulement si U existe et $U > 0$

Exemple : Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f .

- a) $F(x) = \ln(4x-8)$
- b) c) $h(x) = \ln\left(\frac{x-2}{3x+9}\right)$
- c) $G(x) = \ln(-3x+4)$
- d) d) $k(x) = \ln(x^2-3x+4)$

Solution

a) $F(x) = \ln(4x-8)$ $f(x)$ existe si et seulement si $4x-8 > 0 \rightarrow x > 2$

$$D_f =]2 ; +\infty[$$

b) $g(x) = \ln(-3x+4)$ $g(x)$ existe si et seulement si $-3x+4 > 0 \rightarrow -3x > -4 \rightarrow 3x < 4 \rightarrow x < \frac{4}{3}$

$$D_g =]-\infty ; \frac{4}{3}[$$

c) $h(x) = \ln\left(\frac{x-2}{3x+9}\right)$ f(x) existe si et seulement si $\frac{x-2}{3x+9} > 0$ et $3x+9 \neq 0$

$$x-2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad ; \quad 3x+9 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$$

X	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$3x+9$	-		+	+
$x-2$	-		-	+
$\frac{x-2}{3x+9}$	+		-	+

$$D_h =]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$$

d) $k(x) = \ln(x^2-3x+4)$ k(x) existe si et seulement si : $x^2-3x+4 > 0$

$$x^2-3x+4=0 \quad a=1; b=-3; c=4 \rightarrow \Delta = (-3)^2-4(1)(4) = 9-16 = -7 < 0$$

Alors le signe est celui de a ; $a > 0$ on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2-3x+4 > 0$; $D_k = \mathbb{R}$

b) Variation de ln et ses conséquences

Variation : La fonction ln étant définie sur $]0; +\infty[$ et ayant pour dérivée $\left(\frac{1}{x}\right)$ une fonction strictement croissante.

Conséquences : $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$, on a :

- Si $a = b \leftrightarrow \ln a = \ln b$
- Si $a > b \leftrightarrow \ln a > \ln b$
- Si $a < b \leftrightarrow \ln a < \ln b$

Cas particulier :

- Si $a < 1 \rightarrow \ln a < \ln 1$ or $\ln 1 = 0$ alors $\ln a < 0$
- Si $a > 1 \rightarrow \ln a > \ln 1$ or $\ln 1 = 0$ alors $\ln a > 0$

c) Le nombre e

$$\ln e = 1 \quad ; \quad e \approx 2.718 \quad ; \quad \ln x = 1 \rightarrow x = e^1 = e \quad ; \quad \ln e^x = x$$

d) Propriétés algébriques

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

- $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$

Ecrire plus simplement :

- $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3$
- $\ln(2\sqrt{2}) = \ln 2 + \ln \sqrt{2} \rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2$
- $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$

e) Equations et Inéquation comportant ln

1. Equations :

Pour résoudre les équations comportant ln, il faut :

- ✓ Déterminer la condition d'existence de l'inéquation
- ✓ Utiliser les propriétés algébriques des fonctions ln pour en déduire une équation plus simple.

• Equation du type $\ln U = k$

- a) $\ln(2x+6) = 0$
- b) $\ln(3x+2) = 5$
- c) $\ln x + 2 = 3$
- d) $\ln(x+2) = 0$
- e) $\ln(x^2 - 3x + 4)$
- f) $\ln x = -3$

Solution

a) $\ln(2x+6) = 0$ cette équation existe si $2x+6 > 0 \rightarrow 2x > -6 \rightarrow x > -3 \rightarrow x \in]-3 ; +\infty[$

$$\ln(2x+6) = 0 \rightarrow \ln(2x+6) = \ln 1 \rightarrow 2x+6 = 1 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{2} \in]-3 ; +\infty[$$

$$S = \left\{ \frac{-5}{2} \right\}$$

b) $\ln(3x+2) = 5$ cette équation existe si $3x+2 > 0 \rightarrow 3x > -2 \rightarrow x > \frac{-2}{3} \rightarrow x \in \left] \frac{-2}{3} ; +\infty[\right.$

$$\ln(3x+2) = 5 \rightarrow e^{\ln(3x+2)} = e^5 \rightarrow 3x+2 = e^5 \rightarrow 3x = e^5 - 2 \rightarrow x = \frac{e^5 - 2}{3} \rightarrow x \in \left] \frac{-2}{3} ; +\infty[\right.$$

$$S = \left\{ \frac{e^5 - 2}{3} \right\}$$

• Equation du type $\ln U = \ln V$

Résoudre dans chacun des cas suivants les équations :

- a) $\ln(x+1) = \ln(2x-2)$
- b) $\ln(x+3) = \ln(-x-7)$
- c) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = 0$
- d) $\ln(2x-2) + \ln(2x+2) = \ln 3$

Solution

a) $\ln(x+1) = \ln(2x-2)$ cette équation existe si $x+1 > 0$ et $2x-2 > 0 \rightarrow x > -1$ et $x > 1$
 $\rightarrow x \in \left] \frac{-2}{3} ; +\infty[\right.$

b) $\ln(x+3) = \ln(-x-7)$ cette équation existe si $x+3 > 0$ et $-x-7 > 0 \rightarrow x > -3$ et $x < -7$
L'équation n'a pas de solution

• Utilisation d'inconnu Auxiliaire

Pour résoudre les équations du types : $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$. On procède par changement de variable en posant : $X = \ln x$

On se ramène ainsi à une du 2nd degrés.

Exemple : Résoudre dans chacun des cas suivants les équations suivantes :

- $\ln^2 x + 5\ln x - 6 = 6$
- $\ln^4 - \ln^2 x = 0$
- $\ln^2 x + \ln x + 12 = 0$
- $\ln^3 + \ln^2 x + 2\ln x = 0$

Exercice d'application

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

- 1- Calculer $P(-1)$
- 2- Ecrire $P(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes
- 3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
 - a- $P(x) = 0$
 - b- $(\ln x)^3 + 2(\ln)^2 - 5\ln x = 6$

2. Les Inéquations

Résoudre les inéquations comportant $\ln$ revient à utiliser le même procédé que la précédente partie :

- ✓ Déterminer le domaine d'existence
- ✓ Ramener sous forme $\ln a < \ln b$

b₁- Les inéquations de type $\ln U > k$ ou $\ln U < k$

Exemple : $\ln(2x+6) < 0$; $\ln(2x+6) > 0$; $1 - \ln(x) > 0$; $\ln(3x+2) \leq 5$

b₂- Inéquations du type $\ln U < \ln V$ ou $\ln U > \ln V$

Exemple : $\ln(3x+6) < \ln(2x-1)$; $\ln x + \ln(x+1) < \ln x$; $\ln(2x+6) < \ln(-x-1)$; $\ln(4x-3) < \ln(x+1)$

B₃- Utilisation d'inconnu Auxiliaire

Exemple : $-4\ln^2 x + 8\ln x - 4$; $-\ln^3 + \ln^2 + 2\ln x \leq 0$

f) Représentation graphique

1- Limites de référence de la fonction $\ln$

$$*\lim_{x \rightarrow 0^+}(\ln x) = -\infty ;$$

$$*\lim_{x \rightarrow +\infty}(\ln x) = +\infty ;$$

$$*\lim_{x \rightarrow 0^+}(x \ln x) = 0 ;$$

$$*\lim_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1 ;$$

$$*\lim_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 1$$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(4x+5) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + \ln x]$$

3- Dérivée

La dérivée de la fonction $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$

- Détermination de la dérivée d'une fonction composée avec $\ln$: la dérivée d'une fonction composé avec $\ln$ est $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$

Exemple : Dans chacun des cas suivants déterminer la dérivée de f puis dresser son tableau sur son D_f :

a) $f(x) = \ln(x+1)$

b) $g(x) = 2x + \ln(x+2)$

$$c) h(x) = \ln(4x+3)$$

Solution

$$a) f(x) = \ln(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{u'}{u}$$

$$f'(x) = [\ln(x+1)]'$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'}{(x+1)} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)}$$

$$b) g(x) = 2x + \ln(x+2)$$

$$g'(x) = [2x + \ln(x+2)]'$$

$$g'(x) = 2 + \frac{(x+2)'}{(x+2)}$$

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{x+2}$$

$$c) h(x) = \ln(4x+3)$$

$$h'(x) = [\ln(4x+3)]'$$

$$h'(x) = \frac{(4x+3)'}{(4x+3)}$$

$$h'(x) = \frac{4}{4x+3}$$

4- Représentation graphique de la fonction ln

Récapitulatif :

$$D_f =]0 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

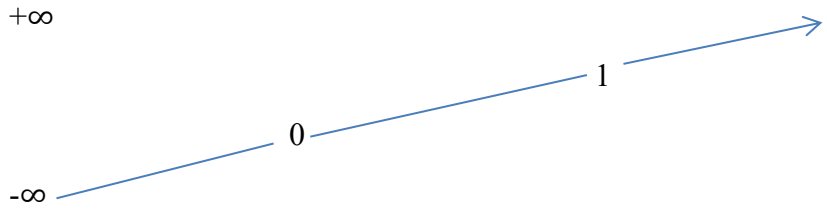
$$\text{Dérivée : } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Variation : $\frac{1}{x} > 0$ alors la fonction $\ln x$ est strictement croissante

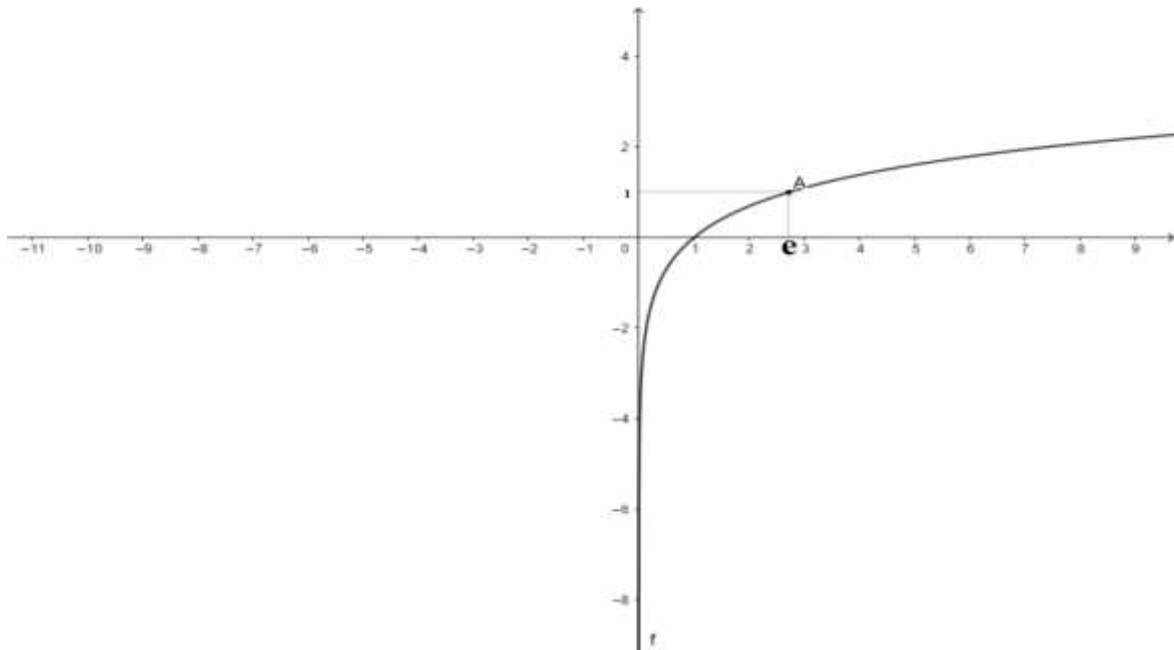
Asymptote : la droite (D) : $X = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $\ln x$.

Les points clés : $\ln x = 0 \rightarrow x = 1$; $\ln e = 1$

Tableau de variation :

X	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+
$f(x)$				

Courbe représentative :



C. fonction exponentielle

1- définition et propriété

Définition : On appelle fonction exponentielle népérienne la bijection réciproque de la fonction logarithme népérienne. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et est notée : $\text{Exp}(x)$ ou e^x

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $(e^x)' = e^x$

Propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, e^x = y \rightarrow x = \ln y$$

Exemple : $e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$; $e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3$

$e^x = -1 \rightarrow$ impossible ; $e^x = 0 \rightarrow$ impossible

a- Domaine de définition d'une fonction composée avec exponentielle

La fonction e^U existe si et seulement si la fonction U existe.

Exemple : Déterminer le domaine de définition de :

a) $f(x) = e^{x^2+1}$; b) $g(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$; c) $h(x) = e^{-x}$

b- Variation et conséquences

La fonction exponentielle est strictement croissante.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

c- Propriétés algébriques

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

1) $e^a e^b = e^{a+b}$

2) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

3) $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$

4) $(e^a)^r = e^{ra}$

IV. Equation – Inéquations

a- Equations

Résoudre les équations comportant exponentielles revient à utiliser les propriétés algébriques et la propriété $e^x = y \rightarrow x = \ln y$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations :

1- $e^{x+1} = 2$

2- $e^{x+3} = 6$

3- $e^{2x} = 4$

4- $e^{2x+1} = 2$

5- $e^{x+3} = e^{2x-4}$

6- $e^{x+3} = e^{2x-4}$

7- $e^{x^2} = e$

8- $e^{x^2} = e^{x+2}$

b. inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $e^x > 2$ 4) $e^{x+1} < e$

2) $e^{x+1} < 1$ 5) $2e^x < 1$

3) $e^{x+1} > e^{2x-2}$ 6) $e^{x^2} \geq 6$

c. Equations- Inéquations polynômiales

Ce sont les équations et inéquations du type : $ae^{2x} + be^x + c = 0$; $ae^{2x} + be^x + c \geq 0$

Pour résoudre ces types d'équations, on procède à un changement de variable en posant

$X = e^x$. Ce changement de variable nous permet de les ramener sous la forme des équations et inéquations du 2nd degré.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
- b) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
- c) $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$
- d) $e^{2x+2} + e^{x+1} - 2 = 0$
- e) $e^{2x} - e^x - 6 \geq 0$
- f) $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$

Exercice d'application

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

- a) Calculer $p(-1)$
- b) Déterminer les réels a, b et c tels que $p(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$
- c) Résoudre $p(x) = 0$
- d) En déduire les solutions de $2e^{2x} - e^x - 5 - 2e^{-x} = 0$

V. étude graphique de la fonction exponentielle

a- Dérivée de la fonction exponentielle

Soit $f(x) = e^x$. La dérivée de la fonction f est : $f'(x) = e^x$

b- Dérivée de la fonction composée

Soit $g(x) = e^{U(x)}$

La dérivée de la fonction composée g est $g'(x) = U'(x)e^{U(x)}$

Exemple : Dériver les fonctions suivantes :

- a) $F(x) = e^{-x}$
- b) $F(x) = e^{4x}$
- c) $f(x) = e^{x^2+1}$
- d) $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

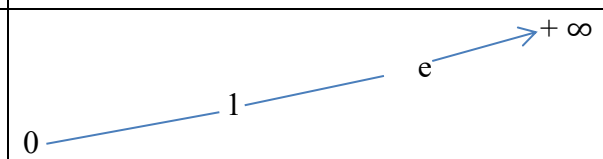
c- Etude des limites

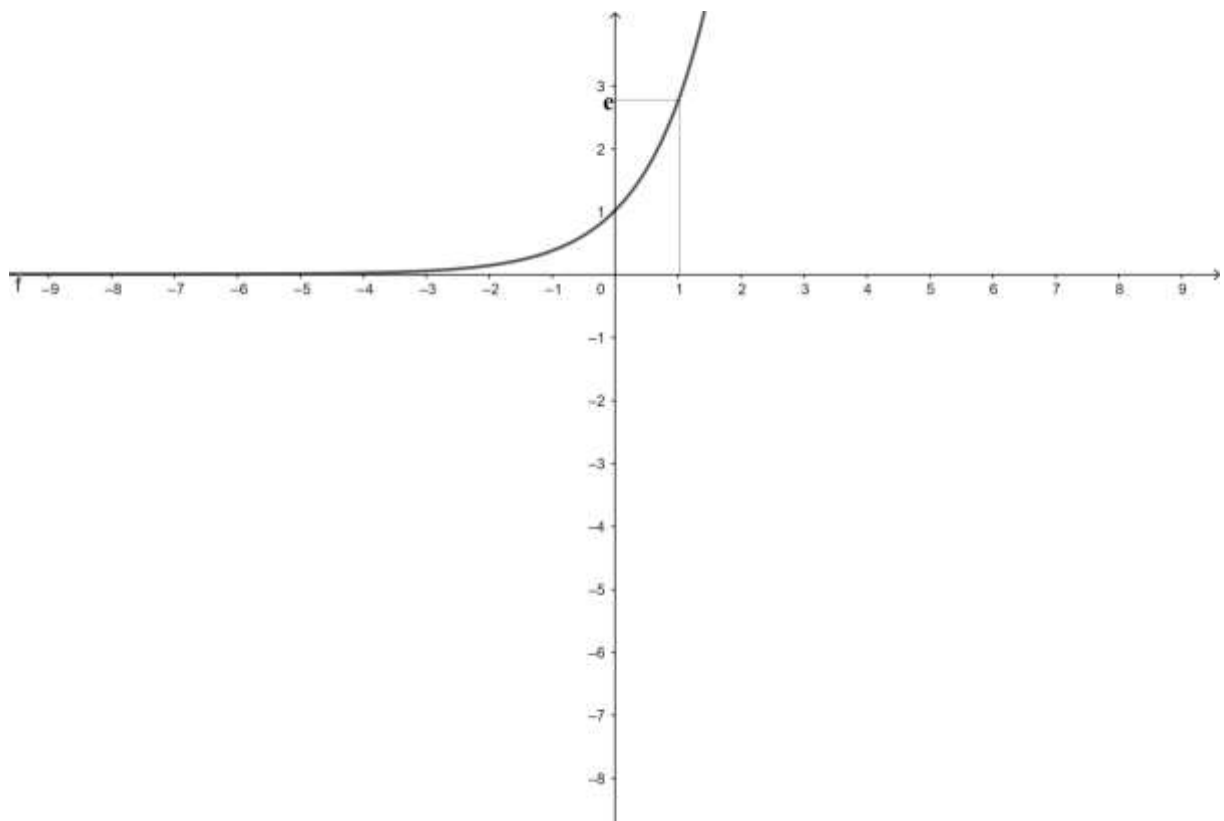
→ Limites de référence

$$\begin{array}{ccccc} * \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; & * \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; & * \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty ; & * \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0 ; & * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{array}$$

→ Graphe de la fonction exponentielle

Tableau de variation

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)'$	+			
e^x				



CHAPITRE 3 : PROBABILITE

I. dénombrement

a- cardinal d'un ensemble

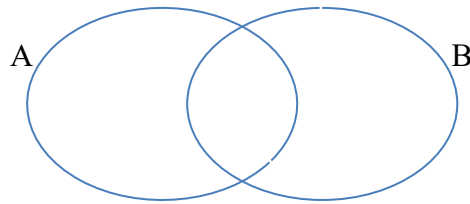
Définition : Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments que contient cet ensemble.

Exemple : Soit $E = \{1, 2, a, b, \alpha, \beta\} \rightarrow \text{Card}E = 6$

$$\text{Card}TA_4 = 53 \text{ élèves}$$

b- Réunion de deux Ensembles

On appelle réunion de deux ensembles A et B notée $A \cup B$. L'union des cardinaux des ensembles A et B. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B$.

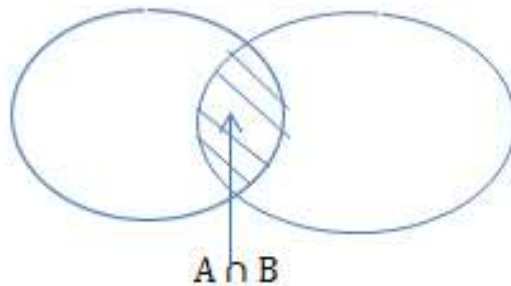


Exemple : Soit $A = \{1, 2, 3, b\}$ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, b, \alpha, \beta, \gamma\}$$

c- Intersection de deux ensembles

On appelle l'intersection de deux ensembles, l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A et à l'ensemble B. On la note $A \cap B$.



Exemple : Soit $A = \{1 ; 2 ; a ; b ; \alpha ; \beta\}$

$$B = \{4 ; a ; \beta ; \gamma\}$$

$$A \cap B = \{a ; \beta\}$$

On a plus généralement :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$$

Exercice d'application

Dans un groupe d'individus, 45 aiment le cinéma, 30 le sport, et 10 à la fois le sport et le cinéma. Calculer le nombre d'individus dans ce groupe.

Exercice d'application 2

On interroge 50 enfants à propos du sport qu'ils pratiquent : 25 pratiquent le football ; 22 le tennis et 16 le basketball. 5 pratiquent les 3 sports, 12 pratiquent le foot et le basket. 8 pratiquent le tennis et le basket et 7 pratiquent le tennis et le football.

Peut-on affirmer que chacun de ces enfants pratiquent au moins un de ces sports ?

Déterminer le nombre :

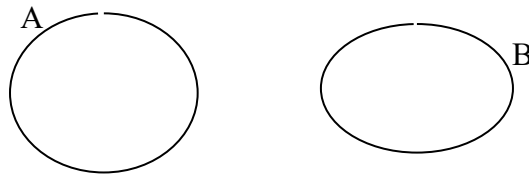
- a) Qui pratiquent uniquement le football
- b) Qui ne pratiquent pas le football.
- c) Qui pratiquent le tennis et le basket, mais ne pratiquent pas le football.

d- Complémentaire d'un Ensemble

Deux ensembles A et $\bar{A}$ sont complémentaires lorsque l'union (réunion) des deux forment un seul ensemble E. $\text{Card}E = \text{Card}A + \text{Card}\bar{A}$.

e- Ensemble disjoints

Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque les éléments de A n'appartiennent pas à B. $\text{Card}(A \cap B) = 0$



II. Outils d'Analyse Combinatoire

a- Arbre de décision

Exemple₁: un buffet est composé de 3 entrées; 5 résistances et 4 desserts.

Combien de plats différents comportant une entrée, une résistance et un dessert peut-on former ? Utiliser l'arbre de décision.

Exemple₂: Une femme a dans sa garde-robe deux jupes, 3 chemises et de vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. Déterminer à l'aide d'un arbre le nombre de manières différentes de s'habiller en utilisant un arbre de décision.

b- Tableau à double Entrée

Un tableau à double entrée est un tableau qui permet d'avoir un résultat composé de deux éléments appartenant à deux ensembles différents. $A \times B$ est l'ensemble des éléments (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}A \times \text{Card}B.$$

Exemple: 8 amis vont à une soirée et devaient être accompagnés chacun de son épouse. A la dernière minute, une des femmes est indisponible et ne peut accompagner son mari.

A l'ouverture de la soirée, ils forment des couples pour danser.

- a) Combien de possibilités a-t-on de former des couples ?
- b) Combien a-t-on de possibilité de former des couples tels qu'aucun homme ne danse avec sa femme ?

c- P-uplet ou p-liste

Soit E un ensemble non vide ayant n éléments, p un entier naturel non nul. Une p-liste ou

p-uplet d'élément de E est une suite de p élément de E.

Le nombre de p-liste de E est n^p .

Dans le cadre usuel, un p-liste se traduit par un tirage successif avec remise de p objets parmi n objets.

Exemple₁ : Combien y a-t-il de numéro de téléphone à 8 chiffres commençant par un 6 ?

Exemple₂ : Au loto sportif, on coche l'une des trois cases du bulletin pour chacun des 18 matchs sélectionnés.

Quel est le nombre total de choix possible pour un jeu.

d- Arrangement

Soit E un ensemble non vide à n élément et p un entier naturel inférieur à n. Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p élément de E tous ordonnés.

Le nombre d'arrangement est : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Dans le cadre usuel, un arrangement se traduit par un tirage successif sans remise de p élément parmi n éléments.

Par convention : $A_n^0 = 1$

Exemple : Une course de chevaux comporte 20 chevaux portant les numéros 1 à 20.

- Combien de tiercé dans l'ordre peut-on obtenir ?
- Combien de mot (ayant un sens ou non) de 5 lettres distincts peut-on former en utilisant les lettres de l'alphabet français ?
- Une urne contient 10 boules. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Combien de résultats distincts peut-on obtenir ?

e- Permutation

Une permutation d'éléments E est une suite ordonnée de tous les éléments de E.

Une permutation de n éléments est : $n! \quad A_n^n = n!$

$n!$: factoriel de n.

Exemple : Combien y a-t-il de possibilité de faire asseoir 7 personnes sur 7 chaises ?

Combien d'anagrammes peut-on former avec les mots : TERMINALE ?

f- Combinaison

Soit E un ensemble de n élément et p un entier naturel tels que $p \leq n$.

Une combinaison de p éléments pris parmi n éléments est :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Dans le cadre usuel, une combinaison introduit la notion du tirage simultanée de p éléments parmi n éléments.

Exemple₁ : Déterminer le nombre de comité de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.

Exemple₂ : On tire simultanément et au hasard 6 boules de 49 boules distinctes. Combien y a-t-il de résultat possible ?

→ **Principe de somme et produit** : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes simultanément et au hasard (l'ensemble de ces 5 cartes est appelé mains).

Déterminer le nombre de main

- a) Total
- b) Qui contiennent exactement '3as'
- c) Qui contienne au moins '1as'

Solution

Données : $n = 32$ cartes ; $p = 5$ cartes

Déterminons :

a- Le nombre total est : $C_{32}^5 = \frac{32!}{5!27!} = 201376$

b- Le nombre de mains qui contiennent exactement 3 as est :

$$C_4^3 \cdot C_{28}^2 = 1512$$

c- Le nombre de mains qui contiennent au moins un as est :

$$C_4^1 \cdot C_{28}^4 + C_4^2 \cdot C_{28}^3 + C_4^3 \cdot C_{28}^2 + C_4^4 \cdot C_{28}^1$$

D'une manière littérale, le mot 'ou' se traduit par une somme et le mot 'et' se traduit par un produit.

Exemple : On tire au hasard une main de 6 mains d'un jeu de 32 cartes.

- 1- Donner le nombre de mains total qu'on peut obtenir.
- 2- Donner le nombre de mains ayant exactement deux piques.
- 3- Donner le nombre de mains ayant 4 as.
- 4- Donner le nombre total de mains ayant au moins deux trèfles.

III. probabilité

3.1. Vocabulaire en Probabilité

Expérience ou variable aléatoire : C'est une expérience dont on ne peut prévoir l'issue avant qu'elle n'ait été complètement réalisée.

Univers des possibilités : L'ensemble de tous les résultats possibles à l'issue d'une expérience aléatoire.

Événement : C'est une partie de l'univers. C'est-à-dire l'ensemble des éventualités de l'expérience aléatoire.

Événement certain : C'est l'univers de l'expérience aléatoire c'est-à-dire l'événement qui est réalisé à l'issue de l'expérience. On le note souvent Ω .

Événement Impossible : C'est un événement qui ne peut être réalisé à l'issue de l'expérience est noté $\emptyset$.

Événement élémentaire : C'est un événement n'ayant qu'une seule éventualité. Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire.

- On dit que A est inclus dans B ($A \subset B$) si toute réalisation de A entraîne la réalisation de B.
- On note $A \cap B$ l'événement intersection des événements A et B, et est l'événement pour lequel A et B sont à la fois.
- On note $A \cup B$ l'événement réunion des événements A et B pour lequel l'événement A est réalisé ou B est réalisé.
- A et B sont deux événements incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que A et B sont deux événements contraires si B est l'ensemble des éventualités pour lesquels A n'est pas réalisé. $B = \bar{A}$
- A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

Exemple : On lance un dé et on s'intéresse au numéro porté sur la face supérieure du dé.

- 1- Quel est le cardinal de l'univers Ω ?
- 2- On note A l'événement obtenir 'un nombre pair'. Quel est le cardinal de A ?
- 3- On note B l'événement obtenir 'un nombre à deux chiffres'. Quel est le cardinal de B ?
- 4- 'C', est l'événement obtenir un nombre inférieur à 10. Quel est le cardinal de C ?
- 5- Définissez l'événement $\bar{A}$ et donnez le cardinal de A.

Solution

- 1- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \text{Card } \Omega = 6$

- 2- $A = \{2, 4, 6\} \rightarrow \text{card}A = 3$
- 3- B est un évènement impossible ; $\text{Card}B = 0$.
- 4- 'C', est un évènement certain donc $\text{Card}C = \text{Card}\Omega = 6$
- 5- $\bar{A}$ est l'évènement obtenir un nombre impaire ; son cardinal est $\text{Card}\bar{A} = 3$.

Exemple₂ : 1-On tire simultanément et au hasard 4 jetons d'un sac opaque contenant 32 jetons indiscernable au toucher, numérotés de 1 à 32.

Soit Ω , l'univers associé à cette épreuve. Calculer $\text{Card}\Omega$.

2-Soit A l'évènement obtenir exactement 3 jetons dot les numéros sont inférieurs ou égaux à 9. Calculer $\text{Card}A$.

3-Définir $\bar{A}$ puis en déduire $\text{Card}(\bar{A})$

3-2 Probabilité d'un évènement

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est définie et est noté Ω . En supposant que les évènements élémentaires sont équiprobables, la fréquence de réalisation de A est appelée la probabilité que l'évènement A soit réalisé est

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorable à la réalisation de A}}{\text{Nombre de Cas possibles}}$$

- La probabilité d'un évènement incertain est $P(\emptyset) = 0$
- La probabilité d'un évènement Certain est $P(\Omega) = 1$

Bibliographie

- ❖ CIAM terminale Littéraire, Edicef 2006
- ❖ Excellence en Mathématique Terminale A, S, E, NMI Education 2014