

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 :

On donne θ_0 un réel tel que : $\cos(\theta_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants (en fonction de θ_0) :

$$a = 3i(2+i)(4+2i)(1+i) \text{ et } b = \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$$

Allez à : [Correction exercice 1 :](#)

Exercice 2 :

Mettre sous la forme $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ (forme algébrique) les nombres complexes

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3+6i}{3-4i}; & z_2 &= \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2; & z_3 &= \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \\ z_4 &= \frac{5+2i}{1-2i}; & z_5 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3; & z_6 &= \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \\ z_7 &= -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}; & z_8 &= \frac{1}{(1+2i)(3-i)}; & z_9 &= \frac{1+2i}{1-2i} \end{aligned}$$

Allez à : [Correction exercice 2 :](#)

Exercice 3 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{\frac{2i\pi}{3}}; & z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}; & z_3 &= 3e^{-\frac{7i\pi}{8}}; & z_4 &= \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right); \\ z_5 &= \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}; & z_6 &= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right); & z_7 &= \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}} \end{aligned}$$

z_8 , le nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

z_9 le nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

Allez à : [Correction exercice 3 :](#)

Exercice 4 :

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants, ainsi que leur conjugués :

$$z_1 = 3 + 3i; \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}; \quad z_3 = -\frac{4}{3}i; \quad z_4 = -2; \quad z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}, \quad \theta \in]-\pi, \pi[$$

Pour z_5 , factoriser par $e^{\frac{3i\theta}{2}}$

$$z_6 = 1 + i; \quad z_7 = 1 + i\sqrt{3}; \quad z_8 = \sqrt{3} + i; \quad z_9 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}; \quad z_{10} = 1 + e^{i\theta}, \quad \theta \in]-\pi, \pi[$$

Pour z_{10} , factoriser par $e^{\frac{i\theta}{2}}$

2. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leur conjugués.

$$z_1 = 1 + i(1 + \sqrt{2}); \quad z_2 = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5}); \quad z_3 = \frac{\tan(\varphi) - i}{\tan(\varphi) + i}; \quad z_4 = \frac{1}{1 + i \tan(\theta)}$$

Indication :

Ecrire z_1 sous la forme $\alpha(e^{i\theta} + e^{2i\theta})$

Calculer z_2^5

3. Calculer

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$$

Allez à : [Correction exercice 4 :](#)

Exercice 5 :

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.
3. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

Allez à : [Correction exercice 5 :](#)

Exercice 6 :

Etablir les égalités suivantes :

1.

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) (1+i) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$

2.

$$(1-i) \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) (\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right) - i \sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$$

3.

$$\frac{\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

Allez à : [Correction exercice 6 :](#)

Exercice 7 :

Soit

$$u = 1+i \quad \text{et} \quad v = -1+i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de u et v .
2. Déterminer un argument de u et un argument de v .
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u .
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Allez à : [Correction exercice 7 :](#)

Exercice 8 :

Calculer le module et un argument de

$$u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v = 1-i$$

En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Allez à : [Correction exercice 8 :](#)

Exercice 9 :

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i}; z_2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3; z_3 = (1+i\sqrt{3})^4; z_4 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5;$$

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}; z_6 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$$

Allez à : [Correction exercice 9 :](#)

Exercice 10 :

Calculer les racines carrées des nombres suivants.

$$z_1 = -1; z_2 = i; z_3 = 1+i; z_4 = -1-i; z_5 = 1+i\sqrt{3};$$

$$z_6 = 3+4i; z_7 = 7+24i; z_8 = 3-4i; z_9 = 24-10i$$

Allez à : [Correction exercice 10 :](#)

Exercice 11 :

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Allez à : [Correction exercice 11 :](#)

Exercice 12 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$.
3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.
4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$.
5. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.
6. $4z^2 - 2z + 1 = 0$.
7. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
8. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.
9. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.
10. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$.
11. $z^3 + 3z - 2i = 0$.
12. $z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0$.
13. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$.
14. $(1 + i)z^2 - (3 + i)z - 6 + 4i = 0$.
15. $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$.
16. $(1 + 3i)z^2 - (6i + 2)z + 11i - 23 = 0$.

Allez à : [Correction exercice 12 :](#)

Exercice 13 :

Résoudre l'équation :

$$Z^4 + (3 - 6i)Z^2 - 8 - 6i = 0$$

Allez à : [Correction exercice 13 :](#)

Exercice 14 :

$$(1 - i)X^3 - (5 + i)X^2 + (4 + 6i)X - 4i = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle.
2. Résoudre cette équation.

Allez à : [Correction exercice 14 :](#)

Exercice 15 :

1. Montrer que

$$X^3 + (1 - 2i)X^2 - 3(1 + i)X - 2 + 2i = 0 \quad (E)$$

Admet une ou plusieurs racines réelles.

2. Résoudre (E)

Allez à : [Correction exercice 15 :](#)

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$$

Indication : Poser $Z = z^3$ et résoudre d'abord $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$.

Allez à : [Correction exercice 16 :](#)

Exercice 17 :

Soit (E) l'équation

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Allez à : [Correction exercice 17 :](#)

Exercice 18 :

1. Résoudre $X^3 = -2 + 2i$
2. Résoudre $Z^3 = -8i$
3. Résoudre

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1 + 3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$

On rappelle que $\sqrt{676} = 26$.

Allez à : [Correction exercice 18 :](#)

Exercice 19 :

Soit l'équation $z^3 - iz + 1 - i = 0 \quad (E)$

1. Montrer que (E) admet une racine réelle.
2. Déterminer les solutions de (E).

Allez à : [Correction exercice 19 :](#)

Exercice 20 :

Soit (E) l'équation

$$X^4 - (3 + \sqrt{3})X^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)X^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)X - 2i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Allez à : [Correction exercice 20 :](#)

Exercice 21 :

Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1. Calculer z^2 , puis déterminer le module et un argument de z^2 , puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z .

3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Allez à : [Correction exercice 21 :](#)

Exercice 22 :

1. Donner les solutions de :

$$u^4 = -4$$

Sous forme algébrique et trigonométrique.

2. Donner les solutions de :

$$(z + 1)^4 + 4(z - 1)^4 = 0$$

Sous forme algébrique.

Allez à : [Correction exercice 22 :](#)

Exercice 23 :

1. Résoudre

$$X^3 = -2\sqrt{2}$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

- 2.

Trouver les solutions de

$$(z + i)^3 + 2\sqrt{2}(z - i)^3 = 0$$

On donnera les solutions (et sous forme algébrique en bonus).

Allez à : [Correction exercice 23 :](#)

Exercice 24 :

- Donner les solutions complexes de $X^4 = 1$.
- Résoudre $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Résoudre $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : [Correction exercice 24 :](#)

Exercice 25 :

Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le nombre complexe

$$\left(\frac{1 + i - \sqrt{3}(1 - i)}{1 + i}\right)^2$$

Allez à : [Correction exercice 25 :](#)

Exercice 26 :

- Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i}{1-i}$, calculer $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}$
- Déterminer le module et un argument de $1 + i\sqrt{3}$, calculer $(1 + i\sqrt{3})^{2010}$
- Calculer les puissances n -ième des nombres complexes.

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}; \quad z_2 = 1 + j; \quad z_3 = \frac{1 + i \tan(\theta)}{1 - i \tan(\theta)}; \quad z_4 = 1 + \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

Allez à : [Correction exercice 26 :](#)

Exercice 27 :

Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit réel ? Imaginaire ?

Allez à : [Correction exercice 27 :](#)

Exercice 28 :

Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ , et soit $\bar{z}$ son conjugué. Calculer

$$(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n)$$

En fonction de ρ et θ . Et de $\cos(\theta) \cos(2\theta) \dots \cos(n\theta)$

Allez à : [Correction exercice 28 :](#)

Exercice 29 :

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1 + iz| = |1 - iz|$
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = \frac{1 + ia}{1 - ia}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Montrer, sans les calculer, que les solutions sont réelles. Trouver alors les solutions.

3. Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

Allez à : [Correction exercice 29 :](#)

Exercice 30 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{2z + 1}{z - 1}\right)^4 = 1$$

Allez à : [Correction exercice 30 :](#)

Exercice 31 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = \left(\frac{1 - i}{1 - i\sqrt{3}}\right)^4$$

Allez à : [Correction exercice 31 :](#)

Exercice 32 :

1. Déterminer les deux solutions complexes de $u^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
2. Résoudre

$$\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

On explicitera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : [Correction exercice 32 :](#)

Exercice 33 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z - 1}{z - i}\right)^3 = -8$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : [Correction exercice 33 :](#)

Exercice 34 :

On appelle $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = 1$ (donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique)
2. Montrer que $\bar{j} = j^2$

3. Montrer que $j^{-1} = j^2$
4. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
5. Calculer $\frac{1}{1+j}$.
6. Calculer j^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Allez à : [Correction exercice 34 :](#)

Exercice 35 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1 + i)$$

Et montrer qu'une seule de ces solutions a une puissance quatrième réelle.

Allez à : [Correction exercice 35 :](#)

Exercice 36 :

1. Donner les solutions complexes de $X^4 = 1$.
2. Résoudre $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : [Correction exercice 36 :](#)

Exercice 37 :

Trouver les racines cubiques de $11 + 2i$.

Allez à : [Correction exercice 37 :](#)

Exercice 38 :

Calculer

$$\frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}}$$

Algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Allez à : [Correction exercice 38 :](#)

Exercice 39 :

Trouver les racines quatrième de 81 et de -81 .

Allez à : [Correction exercice 39 :](#)

Exercice 40 :

Soit $n \geq 2$, un entier.

1.
 - a. Déterminer les complexes qui vérifient $z^{2n} = 1$.
 - b. Déterminer les complexes qui vérifient $z^n = -1$.
2. Calculer la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$.

Allez à : [Correction exercice 40 :](#)

Exercice 41 :

Soit z une racine n -ième de -1 , donc $z^n = -1$. Avec $n > 2$ et $z \neq -1$

Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k} = 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2(n-1)}$$

Allez à : [Correction exercice 41 :](#)

Exercice 42 :

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes ayant le même cube.
Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1 .
2. Donner, sous forme polaire (forme trigonométrique) les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0$$

Indication : poser $Z = z^3$ et calculer $(9 + i)^2$.

Allez à : [Correction exercice 42 :](#)

Exercice 43 :

Déterminer les racines quatrième de $-7 - 24i$.

Allez à : [Correction exercice 43 :](#)

Exercice 44 :

Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}; \quad z^4 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}; \quad z^6 + 27 = 0; \quad 27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$$

Allez à : [Correction exercice 44 :](#)

Exercice 45 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^5 = 1$
2. $z^5 = 1 - i$
3. $z^3 = 2 - 2i$
4. $z^5 = \bar{z}$

Allez à : [Correction exercice 45 :](#)

Exercice 46 :

1. Calculer les racines n -ième de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Allez à : [Correction exercice 46 :](#)

Exercice 47 :

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = z^n - 1$$

Et en déduire que si $z \neq 1$, on a :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{ix} - 1 = 2ie^{\frac{ix}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme :

$$Z_n = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{(n-1)ix}$$

Et en déduire les valeurs de

$$X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos((n-1)x)$$

$$Y_n = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin((n-1)x)$$

Allez à : [Correction exercice 47 :](#)

Exercice 48 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ une racine cinquième de 1, donc $\alpha^5 = 1$.

1. Quelles sont les 4 complexes qui vérifient ces conditions ?
2. Montrer que $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$
3. Calculer $1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4$

Indication : On calculera de deux façon différente la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

On donnera le résultat sous forme algébrique.

Allez à : [Correction exercice 48 :](#)

Exercice 49 :

Soit ϵ une racine n -ième de l'unité, $\epsilon \neq 1$; calculer

$$S = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \cdots + n\epsilon^{n-1}$$

Allez à : [Correction exercice 49 :](#)

Exercice 50 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Allez à : [Correction exercice 50 :](#)

Exercice 51 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = \bar{z}$ où $n \geq 1$.

Allez à : [Correction exercice 51 :](#)

Exercice 52 :

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montrer que

$$\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$$

Allez à : [Correction exercice 52 :](#)

Exercice 53 :

Linéariser :

$$A(x) = \cos^3(x); B(x) = \sin^3(x); C(x) = \cos^4(x); D(x) = \sin^4(x); E(x) = \cos^2(x) \sin^2(x);$$

$$F(x) = \cos(x) \sin^3(x); G(x) = \cos^3(x) \sin(x); H(x) = \cos^3(x) \sin^2(x);$$

$$I(x) = \cos^2(x) \sin^3(x); J(x) = \cos(x) \sin^4(x)$$

Allez à : [Correction exercice 53 :](#)

Exercice 54 :

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit imaginaire pur.

Allez à : [Correction exercice 54 :](#)

Exercice 55 :

Soit $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, avec $\rho e^{i\theta} \neq 1$

Soit

$$z = \frac{1 + \rho e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}}$$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z .

Allez à : [Correction exercice 55](#) :

Exercice 56 :

1. Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$
2. En déduire une solution de l'équation $(E) z^2 = -8i$.
3. Ecrire les deux solutions de (E) sous forme algébrique, et sous forme exponentielle.
4. Déduire de la première question une solution de l'équation $(E_0) z^3 = -8i$.

Allez à : [Correction exercice 56](#) :

Exercice 57 :

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z(1 - z)$

1. Déterminer les points fixes de f c'est-à-dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

$$\text{Indication : } z(1 - z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$$

Allez à : [Exercice 57](#) :

Exercice 58 :

Posons $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$ l'application définie pour tout $z \in E$ par :

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

1. Montrer que l'application est injective.
2. Montrer que pour tout $z \in E$ on a $f(z) \neq 1$.
3. Démontrer l'égalité

$$f(E) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Que peut-on en déduire sur f .

4. Soit $z \in E$. Montrer que

$$1 - |f(z)|^2 = 4 \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z + i|^2}$$

5. Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Montrer que l'on a

$$f(\mathbb{R}) = \mathcal{U} \setminus \{1\}$$

Allez à : [Correction exercice 58](#) :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$\begin{aligned} |a| &= |3i(2 + i)(4 + 2i)(1 + i)| = |3i| \times |2 + i| \times |4 + 2i| \times |1 + i| \\ &= 3 \times \sqrt{2^2 + 1^2} \times 2 \times |2 + i| \times \sqrt{1^2 + 1^2} = 6 \left(\sqrt{2^2 + 1^2}\right)^2 \times \sqrt{2} = 6 \times 5\sqrt{2} \\ &= 30\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(a) &= \arg(3i(2+i)(4+2i)(1+i)) = \arg(3i) + \arg(2+i) + \arg(4+2i) + \arg(1+i) + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + \arg(2+i) + \arg(2(2+i)) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{3\pi}{4} + \arg(2+i) + \arg 2 + \arg(2+i) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2\arg(2+i) + 2k\pi\end{aligned}$$

Soit θ un argument de $2+i$, $\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ donc $\cos(\theta) = \cos(\theta_0)$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta_0)$, on en déduit que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$

Par suite

$$\begin{aligned}\arg(a) &= \frac{3\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi \\ |b| &= \left| \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i} \right| = \frac{|4+2i| \times |-1+i|}{|2-i| \times |3i|} = \frac{2 \times |2+i| \times \sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2} \times 3} = \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times 3} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(b) &= \arg(4+2i) + \arg(-1+i) - \arg(2-i) - \arg(3i) + 2k\pi = \theta_0 + \frac{3\pi}{4} - (-\theta_0) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 1 :**

Correction exercice 2 :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{3+6i}{3-4i} = z_1 = \frac{(3+6i)(3+4i)}{3^2+(-4)^2} = \frac{9+12i+18i-24}{25} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i \\ z_2 &= \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{2^2+(-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{2+i+2i-1}{2^2+(-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{1+6i-9}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i\end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned}z_2 &= \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(1+i)^2}{(2-i)^2} = \frac{1+2i-1}{4-4i-1} = \frac{2i}{3-4i} = \frac{2i(3+4i)}{3^2+(-4)^2} = \frac{6i-8}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i \\ z_3 &= \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{(2+5i)(1+i) + (2-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+5i-5+2-2i-5i-5}{1^2-i^2} \\ &= -\frac{6}{2} = -3\end{aligned}$$

Autre méthode

$$z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{\overline{2+5i}}{\overline{1-i}} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)$$

Or

$$\frac{2+5i}{1-i} = \frac{(2+5i)(1+i)}{1^2+(-1)^2} = \frac{2+2i+5i-5}{2} = \frac{-3+7i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$$

Donc

$$\begin{aligned}z_3 &= 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -3 \\ z_4 &= \frac{5+2i}{1-2i} = \frac{(5+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{5+10i+2i-4}{5} = \frac{-1+12i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{12}{5}i \\ z_5 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} \times i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right) - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{1}{8} + i\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = 1\end{aligned}$$

Autre méthode

$$z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$$

Ou encore

$$z_5 = j^3 = 1$$

$$z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

On peut toujours s'amuser à développer $(1+i)^9$ et $(1-i)^7$ mais franchement ce n'est pas une bonne idée.

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = (1+i)^2 \frac{(1+i)^7}{(1-i)^7} = (1+i)^2 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7 = (1+2i-1) \left(\frac{(1+i)(1+i)}{1^2+(-1)^2}\right)^7 \\ &= 2i \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^7 = \frac{2i(2i)^7}{2^7} = \frac{2^8 i^8}{2^7} = 2i^8 = 2 \end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^7} = \frac{(\sqrt{2})^9 (e^{i\frac{\pi}{4}})^9}{(\sqrt{2})^7 (e^{-i\frac{\pi}{4}})^7} = \frac{(\sqrt{2})^2 e^{i\frac{9\pi}{4}}}{e^{-i\frac{7\pi}{4}}} = 2e^{i(\frac{9\pi}{4} + \frac{7\pi}{4})} = 2e^{\frac{16i\pi}{4}} = 2e^{4i\pi} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$z_7 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = -\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2} = -\frac{2(1+i\sqrt{3})}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} z_7 &= -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{j} = \frac{j^2}{j^3} = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_8 &= \frac{1}{(1+2i)(3-i)} = \frac{1}{3-i+6i+2} = \frac{1}{5+5i} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1+i} = \frac{1}{5} \times \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}i \\ z_9 &= \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{(1+2i)^2}{5} = \frac{1+4i-4}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 2 :**

Correction exercice 3 :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3} \\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ z_3 &= 3e^{-\frac{7i\pi}{8}} = 3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right) = 3\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) - 3i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\ &= 3\cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) - 3i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -3\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) - 3i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \\ &= -3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 3i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ z_4 &= \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = 2e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2i \\ z_5 &= \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})} = 2e^{i\pi} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_6 &= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right) = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 6e^{\frac{7i\pi}{6}} = 6\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\
&= -3\sqrt{3} - 3i \\
z_7 &= \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{\frac{8i\pi}{6}} = \frac{2}{3}e^{\frac{4i\pi}{3}} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3} \\
z_8 &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \\
z_9 &= 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 3i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

A moins de connaître $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ on ne peut pas faire mieux.

Allez à : **Exercice 3 :**

Correction exercice 4 :

1. $z_1 = 3(1 + i)$ donc $|z_1| = 3|1 + i| = 3 \times \sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$

Si on ne met pas 3 en facteur

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

C'est moins simple.

On appelle θ_1 un argument de z_1

$$\cos(\theta_1) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et $\overline{z_1} = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_1 = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \text{ soit } \theta_2 \text{ un argument de } z_2$$

$$\cos(\theta_2) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\theta_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $z_2 = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

Et $\overline{z_2} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Pour z_3 la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode.

$$z_3 = -\frac{4}{3}i = -\frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Cette forme n'est pas la forme trigonométrique car $-\frac{4}{3}$ est négatif, ce n'est donc pas le module, mais

$$-1 = e^{i\pi}, \text{ donc } z_3 = \frac{4}{3}e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = \frac{4}{3}e^{\frac{3i\pi}{2}} = \frac{4}{3}e^{-\frac{i\pi}{2}}.$$

On aurait pu directement écrire que $-i = e^{\frac{3i\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

Et $\overline{z_3} = \frac{4}{3}e^{\frac{i\pi}{2}}$

Pour z_4 la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode.

$$z_4 = -2 = 2e^{i\pi}$$

Et $\overline{z_4} = e^{-i\pi} = e^{i\pi}$

C'est plus dur

$$z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = e^{\frac{3i\theta}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{3i\theta}{2}}$$

Comme $-\pi < \theta < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ par conséquent $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, ce qui signifie que $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien le module.

Et $\overline{z_5} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{3i\theta}{2}}$

$|z_6| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, soit θ_6 un argument de z_6

$$\cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\theta_6 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_6 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Et $\overline{z_6} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$|z_7| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, soit θ_7 un argument de z_7

$$\cos(\theta_7) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_7) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\theta_7 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $z_7 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_7 = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Et $\overline{z_7} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$|z_8| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, soit θ_8 un argument de z_8

$$\cos(\theta_8) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_8) = \frac{1}{2}$$

Donc $\theta_8 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $z_8 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_8 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Première méthode

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3} - i}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Deuxième méthode

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3} + i + 3i - \sqrt{3}}{4} = \frac{4i}{4} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

C'est plus dur

$$z_{10} = 1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = e^{\frac{i\theta}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}$$

Comme $-\pi < \theta < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ par conséquent $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, ce qui signifie que $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien le module.

$$\text{Et } \overline{z_{10}} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{i\theta}{2}}$$

2. Faisons comme d'habitude

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Soit θ_1 un argument de z_1

$$\cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$$

L'ennui c'est que l'on ne connaît pas d'angle dont le cosinus et le sinus valent ces valeurs. Il faut être malin.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i(1 + \sqrt{2}) = 1 + i + \sqrt{2}i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{2}i = \sqrt{2} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} \left(e^{-\frac{i\pi}{8}} + e^{\frac{i\pi}{8}} \right) = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{\frac{3i\pi}{8}} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \text{ donc } \theta_1 = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ et } |z_1| = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Remarque :

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Le module de $\overline{z_1}$ est aussi $2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ et un argument est $-\frac{3\pi}{8}$.

Faisons comme d'habitude

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5}) \\ |z_2| &= \sqrt{\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)^2 + (1 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

Soit θ_2 un argument de z_2

$$\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

L'ennui c'est que l'on ne connaît pas d'angle dont le cosinus et le sinus valent ces valeurs.

Calculons z_2^5

$$\begin{aligned}
z_2^5 &= \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5}) \right)^5 \\
&= \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)^5 + 5 \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)^4 i(1 - \sqrt{5}) + 10 \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)^3 (i(1 - \sqrt{5}))^2 \\
&\quad + 10 \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)^2 (i(1 - \sqrt{5}))^3 + 5 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} (i(1 - \sqrt{5}))^4 + (i(1 - \sqrt{5}))^5 \\
&= (10 + 2\sqrt{5})^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 5i(10 + 2\sqrt{5})^2 (1 - \sqrt{5}) \\
&\quad - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - 10i(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^3 \\
&\quad + 5\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5})^4 + i(1 - \sqrt{5})^5 \\
&= \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \left((10 + 2\sqrt{5})^2 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 + 5(1 - \sqrt{5})^4 \right) \\
&\quad + i(1 - \sqrt{5}) \left(5(10 + 2\sqrt{5})^2 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 + (1 - \sqrt{5})^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(10 + 2\sqrt{5})^2 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 + 5(1 - \sqrt{5})^4 \\
&\quad = 100 + 40\sqrt{5} + 20 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5} + 5) \\
&\quad \quad + 5(1 - 4\sqrt{5} + 6 \times (\sqrt{5})^2 - 4(\sqrt{5})^3 + (\sqrt{5})^4) \\
&\quad = 120 + 40\sqrt{5} - 10(10 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5}) + 5(56 - 24\sqrt{5}) \\
&\quad = 120 + 40\sqrt{5} - 10(60 - 20\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 20) + 280 - 120\sqrt{5} = 0 \\
&5(10 + 2\sqrt{5})^2 - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^2 + (1 - \sqrt{5})^4 \\
&\quad = 5(100 + 40\sqrt{5} + 20) - 10(10 + 2\sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5} + 5) \\
&\quad \quad + (1 - 4\sqrt{5} + 6 \times (\sqrt{5})^2 - 4(\sqrt{5})^3 + (\sqrt{5})^4) \\
&\quad = 600 + 200\sqrt{5} - 10(40 - 8\sqrt{5}) + 56 - 24\sqrt{5} = 2566 + 256\sqrt{5} \\
&\quad = 256(1 + \sqrt{5}) \\
z_2^5 &= 256i(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = 256i \times (-4) = -2^{10}i
\end{aligned}$$

Ensuite il faut trouver les solutions de $Z^5 = -2^{10}i = 2^{10}e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$$\begin{aligned}
Z^5 = -2^{10}i = 2^{10}e^{-\frac{i\pi}{2}} &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z^5| = 2^{10} \\ \arg(Z^5) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 2^2 \\ 5 \arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 4 \\ \arg(Z) = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$Z_0 = 4e^{-i\frac{\pi}{10}}; \quad Z_1 = 4e^{\frac{3i\pi}{10}}; \quad Z_2 = 4e^{\frac{7i\pi}{10}}; \quad Z_3 = 4e^{\frac{11i\pi}{10}}; \quad Z_4 = 4e^{\frac{15i\pi}{10}} = -4i$$

Parmi ces cinq complexes, le seul qui a une partie réelle positive et une partie imaginaire négative est $4e^{-i\frac{\pi}{10}}$ d'où $z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{10}}$ donc un argument de z_2 est $-\frac{\pi}{10}$.

Le module de $\overline{z_2}$ est 4 et un argument est $\frac{\pi}{10}$.

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{\tan(\varphi) - i}{\tan(\varphi) + i} = \frac{(\tan(\varphi) - i)(\tan(\varphi) - i)}{\tan^2(\varphi) + 1^2} = \frac{\tan^2(\varphi) - 2i \tan(\varphi) - 1}{\frac{1}{\cos^2(\varphi)}} \\
&= \cos^2(\varphi) (\tan^2(\varphi) - 1) - 2i \cos^2(\varphi) \tan(\varphi) \\
&= \cos^2(\varphi) \left(\frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} - 1 \right) - 2i \cos^2(\varphi) \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\
&= -(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) - 2i \sin(\varphi) \cos(\varphi) = -\cos(2\varphi) - i \sin(2\varphi) \\
&= -(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) = e^{i\pi} e^{-2i\varphi} = e^{i(\pi-2\varphi)}
\end{aligned}$$

Le module de z_3 est 1 et un argument est $\pi - 2\varphi$

Autre méthode

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{\tan(\varphi) - i}{\tan(\varphi) + i} = \frac{i(\tan(\varphi) - i)}{i(\tan(\varphi) + i)} = \frac{i \tan(\varphi) + 1}{i \tan(\varphi) - 1} = \frac{i \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} + 1}{i \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} - 1} = \frac{i \sin(\varphi) + \cos(\varphi)}{i \sin(\varphi) - \cos(\varphi)} \\
&= \frac{\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)}{-(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi))} = -\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = -e^{2i\varphi} = e^{i\pi} e^{2i\varphi} = e^{i(\pi+2\varphi)}
\end{aligned}$$

Un argument de $\overline{z_3}$ est $-\pi - 2\varphi$

$$z_4 = \frac{1}{1 + i \tan(\theta)} = \frac{1}{1 + i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) + i \sin(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{e^{i\theta}} = \cos(\theta) e^{-i\theta}$$

Si θ est tel que $\cos(\theta) > 0$ alors $|z_4| = \cos(\theta)$ et un argument de z_4 est $-\theta$

Si θ est tel que $\cos(\theta) < 0$ alors $|z_4| = -\cos(\theta)$ et un argument de z_4 est $-\theta + \pi$

3. On sait que $j^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = -j^2$

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{2010} = (-j^2)^{2010} = (j^2)^{2010} = j^{4020} = j^{3 \times 1340} = (j^3)^{1340} = 1^{1340} = 1$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

$$1. (3 + 2i)(1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 3 - 7i + 6 = 9 - 7i$$

2.

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{i(-\frac{5\pi}{6})} = 6e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})} = 6e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -6i$$

3.

$$\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i(-\frac{5\pi}{6})}} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} e^{\frac{5i\pi}{6}} = \frac{2}{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6})} = \frac{2}{3} e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1.

$$\begin{aligned}
&\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \right) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) (1 + i) = e^{i\frac{\pi}{7}} e^{-i\frac{\pi}{3}} \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{7}} e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&= \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i(\frac{12\pi}{84} - \frac{28\pi}{84} + \frac{21\pi}{84})} = \sqrt{2} e^{\frac{5i\pi}{84}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right) \right)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(1-i) \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) (\sqrt{3}-i) &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\
&= 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{5}} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2} e^{i\left(-\frac{15\pi}{60} + \frac{12\pi}{60} - \frac{10\pi}{60}\right)} = 2\sqrt{2} e^{-\frac{13i\pi}{60}} \\
&= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right) - i \sin\left(\frac{13\pi}{60}\right) \right) \\
\frac{\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)}{1+i} &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{-\frac{2i\pi}{12}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 6 :**

Correction exercice 7 :

- $|u| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $|v| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$
-

$$u = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc un argument de u est $\frac{\pi}{4}$.

$$v = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Donc un argument de v est $\frac{2\pi}{3}$.

- On cherche les solutions complexes de $z^3 = u$

$$\begin{aligned}
z^3 = u &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \sqrt{2} \\ \arg(z^3) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 3 \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{6}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}
\end{aligned}$$

u admet trois racines cubiques

$$z_0 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}; \quad z_1 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{9\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_2 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

-

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5i\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

Et

$$\frac{u}{v} = \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{4}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Allez à : **Exercice 7 :**

Correction exercice 8 :

$$|u| = \frac{|\sqrt{6} - i\sqrt{2}|}{2} = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2 \times 3} - i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} - i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc $|u| = \sqrt{2}$ et un argument de u est $-\frac{\pi}{6}$.

$$|v| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$v = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc $|v| = \sqrt{2}$ et un argument de v est $-\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc $\left| \frac{u}{v} \right| = 1$ et un argument de $\frac{u}{v}$ est $\frac{\pi}{12}$.

Allez à : **Exercice 8 :**

Correction exercice 9 :

$$z_1 = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2 + 1^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

$$z_3 = (1+i\sqrt{3})^4 = \left(2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^4 = 2^4 \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^4 = 16 e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 = \left(2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^5 + \left(2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^5 = 2^5 \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^5 + 2^5 \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^5 \\ &= 32 \left(e^{\frac{5i\pi}{3}} + e^{-\frac{5i\pi}{3}} \right) = 32 \times 2 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 64 \left(-\frac{1}{2} \right) = -32 \end{aligned}$$

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Autre méthode

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\begin{aligned} z_6 &= \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(2 + 2i)}{2^2 + (-2)^2} = \frac{2\sqrt{6} + 2i\sqrt{6} - 2i\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{8} = \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \end{aligned}$$

Remarque : il aurait mieux valu mettre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en facteur d'entrée.

Là on est mal parti, il va falloir trouver le module, puis le mettre en facteur,

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1))$$

$$|z_6| = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 2\sqrt{2} = 1$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Mais on ne connaît pas d'angle vérifiant cela. Il faut faire autrement

$$|\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$z_6 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i} = \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Allez à : **Exercice 9 :**

Correction exercice 10 :

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = -1$

$$Z_1 = -i \quad \text{et} \quad Z_2 = i$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_1 = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_1 = -2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad Z_2 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connaît pas les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a + ib)^2 = 1 + i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 1 \\ L_2 & 2ab = 1 \end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$|(a + ib)^2| = |1 + i| \Leftrightarrow |a + ib|^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow b^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{-2 + 2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de même signe donc les deux solutions de $z^2 = 1 + i$ sont

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = -1 - i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$$Z_1 = -2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{5\pi}{8}} \quad \text{et} \quad Z_2 = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{5\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connaît pas les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a + ib)^2 = -1 - i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = -1 \\ L_2 & 2ab = -1 \end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$|(a + ib)^2| = |-1 - i| \Leftrightarrow |a + ib|^2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2 = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{-2 + 2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de signes opposés donc les deux solutions de $z^2 = -1 - i$ sont

$$Z_1 = \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$Z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2 = 3 + 4i$

On pose $Z = a + ib$, $Z^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 3 \\ L_2 & 2ab = 4 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|Z^2| \Leftrightarrow |3 + 4i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{25} = 5 \quad L_3$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3 , on trouve $2a^2 = 8 \Leftrightarrow$

$a^2 = 4$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1 , d'après l'équation $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 2$ alors $b = 1$ et $Z_1 = 2 + i$ et si $a = -2$ alors $b = -1$ et $Z_2 = -2 - i$

Deuxième méthode

$3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4 = 3a^2 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 3A - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de $A^2 - 3A - 4 = 0$ sont $A_1 = -1 < 0$ et $A_2 = 4$, donc $a^2 = 4$,

Si $a = -2$ alors $b = \frac{2}{a} = -1$ et alors $Z_2 = -2 - i$, si $a = 2$ alors $b = \frac{2}{a} = 1$ et alors $Z_1 = 2 + i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2 = -7 - 24i$

On pose $Z = a + ib$, $Z^2 \Leftrightarrow -7 - 24i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow -7 - 24i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow$

$L_1 \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = -24 \end{cases}$

$L_2 \begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = -24 \end{cases}$

On rajoute l'équation

$$\begin{aligned} |Z^2| \Leftrightarrow |3 + 4i| = a^2 + b^2 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} \\ &= 25 \quad L_3 \end{aligned}$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3 , on trouve $2a^2 =$

$18 \Leftrightarrow a^2 = 9$, d'où l'on tire $b^2 = 16$. Les valeurs possibles de a sont ± 3 et les valeurs possibles de b sont ± 4 , d'après l'équation $2ab = -24 \Leftrightarrow ab = -12$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 3$ alors $b = -4$ et $Z_1 = 3 - 4i$ et si $a = -3$ alors $b = 4$ et $Z_2 = -3 + 4i$

Deuxième méthode

$-7 - 24i = 9 - 24i - 16 = (3 - 4i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{-12}{a}\right)^2 = -7 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{144}{a^2} = -7 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 144 = -7a^2 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 7a^2 - 144 = 0 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 7A - 144 = 0 \\ b = -\frac{12}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2 + 7A - 144 = 0$ sont $A_1 = -16 < 0$ et $A_2 = 9$, donc $a^2 = 9$,

Si $a = 3$ alors $b = -\frac{12}{a} = -4$ et alors $Z_2 = 3 - 4i$, si $a = -3$ alors $b = -\frac{12}{a} = 4$ et alors $Z_1 = -3 + 4i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2 = 3 - 4i = z_8$, on peut refaire comme précédemment mais on va prendre la méthode la plus simple

$$Z^2 = 3 - 4i = 4 - 4i - 1 = (2 - i)^2$$

Il y a deux solutions

$$Z_1 = 2 - i \quad \text{et} \quad Z_2 = -2 + i$$

On cherche les complexes Z tels que $Z^2 = z_9 = 24 - 10i$

Là encore, on va aller au plus simple

$$24 - 10i = 25 - 10i - 1 = (5 - i)^2$$

Donc il y a deux solutions

$$Z_1 = 5 - i \quad \text{et} \quad Z_2 = -5 + i$$

Allez à : **Exercice 10 :**

Correction exercice 11 :

1. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose $Z = a + ib$,

$$Z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ L_2 & 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \quad L_3$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3 , on trouve

$$2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, d'après l'équation

$2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ab = \frac{\sqrt{2}}{4}$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Et si $a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

D'autre part

$$Z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Admet deux solutions $Z_3 = e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $Z_4 = -e^{i\frac{\pi}{8}} = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

2. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On pose $Z = a + ib$,

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ L_2 & 2ab = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \quad L_3$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3 , on trouve

$$2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, d'après l'équation

$2ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow ab = \frac{\sqrt{3}}{4}$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Et si $a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

D'autre part

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Admet deux solutions $Z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $Z_4 = -e^{i\frac{\pi}{12}} = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = j^2$$

$$z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j$$

Allez à : Exercice 12 :

2. $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$

$$\Delta = (-(5i + 14))^2 - 4 \times 2(5i + 12) = (-25 + 140i + 196) - 40i - 96 = 75 + 100i = 25(3 + 4i) \\ = 5^2(3 + 4i)$$

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a + ib)^2 = 5 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 3 \\ L_2 & 2ab = 4 \\ L_3 & a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases}$$

En faisant $L_1 + L_3$ on trouve que $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$

En faisant $L_3 - L_2$ on trouve que $2b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$

D'après L_2 a et b sont de même signe donc $a + ib = 2 + i$ ou $a + ib = -2 - i$

Autre méthode $3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$

et alors

$$\Delta = 5^2(2 + i)^2 = (10 + 5i)^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{5i + 14 - (10 + 5i)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ z_1 = \frac{5i + 14 + (10 + 5i)}{2} = \frac{24 + 10i}{2} = 12 + 5i$$

Allez à : Exercice 12 :

3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

$$\Delta = 3 + 4i = (2 + i)^2$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i = 1 - i \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - ij$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i = -1 + i \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + ij^2$$

Allez à : Exercice 12 :

4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(i - 1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$

$$z_1 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i$$

$$z_2 = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i$$

Allez à : Exercice 12 :

$$5. \quad z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-(3 + 4i))^2 - 4(-1 + 5i) = 9 + 24i - 16 + 4 - 20i = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1 = \frac{3 + 4i - (1 - 2i)}{2} = 2 + 3i$$

$$z_2 = \frac{3 + 4i + 1 - 2i}{2} = 2 + i$$

Allez à : Exercice 12 :

$$6. \quad 4z^2 - 2z + 1 = 0$$

Soit on résout « normalement », soit on ruse, rusons

$$4z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$$

Avec $Z = -2z$. Les solutions de $Z^2 + Z + 1 = 0$ sont connues (et puis on vient de les revoir dans 1°))

$$Z_1 = j \quad \text{et} \quad Z_2 = j^2$$

Par conséquent

$$z_1 = -\frac{1}{2}j \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2}j^2$$

Allez à : Exercice 12 :

$$7. \quad z^4 + 10z^2 + 169 = 0$$

On pose $Z = z^2$, $Z^2 + 10Z + 169 = 0$ a pour discriminant

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = 10^2 - (2 \times 13)^2 = (10 - 26)(10 + 26) = -16 \times 36 = -4^2 \times 6^2 = (24i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-10 + 24i}{2} = -5 + 12i$$

$$Z_2 = \frac{-10 - 24i}{2} = -5 - 12i$$

On cherche $z = a + ib$ tel que

$$z^2 = Z_1 \Leftrightarrow (a + ib)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \\ L_2 \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \\ L_3 \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \end{cases}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3 , on trouve que $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$,

En faisant la différence de L_3 et de L_1 , on trouve que $2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$,

D'après L_2 , a et b sont de même signe donc $z^2 = Z_1$ a deux solutions

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = -2 - 3i$$

On peut résoudre de la même façon $Z_2 = z^2$ ou dire que $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent $\overline{z_1} = 2 - 3i$ et $\overline{z_2} = -2 + 3i$ sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

Allez à : Exercice 12 :

$$8. \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0$$

On peut faire comme dans le 7°, mais rusons :

$$z^4 + 2z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z^2}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{z^2}{2}\right) - j\right] \left[\left(\frac{z^2}{2}\right) - j^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - j^4\right] \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - j^2\right] = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - j^2\right) \left(\frac{z}{\sqrt{2}} + j^2\right) \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - j\right) \left(\frac{z}{\sqrt{2}} + j\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \sqrt{2}j^2)(z + \sqrt{2}j^2)(z - \sqrt{2}j)(z + \sqrt{2}j) = 0$$

Les solutions sont

$$\{\sqrt{2}j^2, -\sqrt{2}j^2, \sqrt{2}j, -\sqrt{2}j\}$$

Allez à : Exercice 12 :

$$9. x^4 - 30x^2 + 289 = 0$$

On pose $X = x^2$

$$X^2 - 30X + 289 = 0$$

$$\Delta = 30^2 - 4 \times 289 = 900 - 1156 = -256 = -16^2 = (16i)^2$$

$$X_1 = \frac{30 - 16i}{2} = 15 - 8i$$

$$X_2 = 15 + 8i$$

On cherche x tel que $x^2 = 15 - 8i = 16 - 8i - 1 = (4 - i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_1 = 4 - i$ et $x_2 = -(4 - i) = -4 + i$.

De même on cherche x tel que $x^2 = 15 + 8i = 16 + 8i - 1 = (4 + i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_3 = 4 + i$ et $x_4 = -(4 + i) = -4 - i$.

Les solutions sont

$$\{4 - i, -4 + i, 4 + i, -4 - i\}$$

Allez à : Exercice 12 :

$$10. x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$$

Il faudrait trouver des solutions (réelles ou complexes).

$x = 1$ est solution évidente, mais ensuite cela ne vient pas, mais en regardant mieux on s'aperçoit que 4 premiers termes ressemblent fort au développement de $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ donc

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^4 - 1 - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |(x + 1)^4| = 16 \\ \arg((x + 1)^4) = \arg(16) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 1|^4 = 2^4 \\ 4 \arg(x + 1) = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x + 1| = 2 \\ \arg(x + 1) = \frac{2k\pi}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases} \Leftrightarrow x_k + 1 = 2e^{\frac{ik\pi}{2}},$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3\} \Leftrightarrow x_k = -1 + 2e^{\frac{ik\pi}{2}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$x_0 = -1 + 2 = 1; \quad x_1 = -1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}} = -1 + 2i;$$

$$x_2 = -1 + 2e^{i\pi} = -1 - 2 = -3; \quad x_3 = -1 + 2e^{\frac{3i\pi}{2}} = -1 - 2i$$

Sont les solutions.

Allez à : Exercice 12 :

$$11. z^3 + 3z - 2i = 0$$

On voit que i est une solution évidente (car $i^3 + 3i - 2i = 0$) donc on peut mettre $z - i$ en facteur.

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow z^3 + 3z - 2i = az^3 + (-ia + b)z^2 + (-ib + c)z - ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -ia + b = 0 \\ -ib + c = 3 \\ -ic = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = ia = i \\ c = 3 + ib = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2)$$

Le discriminant de $z^2 + iz + 2$ est $\Delta = i^2 - 4 \times 2 = -9 = (3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z = \frac{-i - 3i}{2} = -2i \quad \text{et} \quad z = \frac{-i + 3i}{2} = i$$

Il y a donc deux solutions, $z_1 = i$ et $z_2 = -2i$.

Allez à : Exercice 12 :

12.

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 + a)^2(1 + i)^2 - 4(1 + a^2)i = (1 + 2a + a^2)(1 + 2i - 1) - 4i - 4ia^2 \\ &= 2i + 4ia + 2ia^2 - 4i - 4ia^2 = -2i + 4ia - 2ia^2 = -2i(1 - 2a + a^2) \\ &= (1 - i)^2(1 - a)^2 = ((1 - i)(1 - a))^2 \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{(1+a)(1+i) - (1-i)(1-a)}{2} = \frac{1+i+a+ia - (1-a-i+ia)}{2} = a+i$$

$$z_1 = \frac{(1+a)(1+i) + (1-i)(1-a)}{2} = \frac{1+i+a+ia + 1-a-i+ia}{2} = 1+ia$$

Allez à : Exercice 12 :

$$13. \Delta = (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = 1 - 25 - 10i + 24 + 8i = -2i$$

Il faut trouver δ tel que $\Delta = \delta^2$

Première méthode :

$$-2i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2 \text{ c'est une identité remarquable. Donc } \delta_1 = 1-i \text{ ou } \delta_2 = -1+i$$

Deuxième méthode

$$\text{On pose } \delta = a + ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -2i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow -2i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases}$$

$$\text{On rajoute l'équation } |\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-2i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Avec le système } \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}, \text{ en faisant la somme des deux équations, on trouve } 2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1,$$

d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 1 , d'après l'équation $2ab = -2 \Leftrightarrow ab = -1$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -1$ et $\delta = 1 - i$ et si $a = -1$ alors $b = 1$ et $\delta = -1 + i$. Ce sont bien les mêmes solutions qu'avec la première méthode.

Troisième méthode

$$\Delta = -2i = 2e^{\frac{3i\pi}{2}}, \text{ donc les racines deuxièmes de } \Delta \text{ sont } \delta = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i \text{ et } \delta = -\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = 1 - i.$$

Pour résoudre $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$, on n'a besoin que d'une racine deuxième, on prend, par exemple $\delta = 1 - i$.

Les deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{-(1-5i) - (1-i)}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = \frac{-1+3i}{i} = \frac{(-1+3i)(-i)}{i(-i)} = 3+i$$

$$z_2 = \frac{-(1-5i) + (1-i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

Allez à : Exercice 12 :

14.

$$\Delta = (-(3+i))^2 - 4(1+i)(-6+4i) = (3+i)^2 - 4(-6+4i-6i-4) = 9-1+6i-4(-10-2i) = 8+6i+40+8i = 48+14i$$

$$\text{On pose } \delta = a + ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 48+14i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow 48+14i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |48+14i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2|24+7i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{24^2+7^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{576+49} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{625} = 2 \times 25 = 50$$

$$\text{Avec le système } \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases}, \text{ en faisant la somme des deux équations, on trouve } 2a^2 = 98 \Leftrightarrow a^2 = 49,$$

d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 7 et les valeurs possibles de b sont ± 1 , d'après l'équation $2ab = 14 \Leftrightarrow ab = 7$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 7$ alors $b = 1$ et $\delta = 7 + i$ et si $a = -7$ alors $b = -1$ et $\delta = -7 - i$

Deuxième méthode

$$\Delta = 48+14i = 49+2 \times 7i - 1 = (7+i)^2 \text{ donc } \delta = 7+i \text{ ou } \delta = -7-i.$$

Troisième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{7}{a}\right)^2 = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{49}{a^2} = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 49 = 48a^2 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^4 - 48a^2 - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 48A - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 - 48A - 49 = 0$ est $\Delta' = 48^2 +$

$4 \times 49 = 2500 = 50^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{48-50}{2} = -1$ et $A_2 = \frac{48+50}{2} = 49$, $A_1 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -1$, par contre $a^2 = 49$ admet deux solutions $a = -7$ et $a = 7$.

Si $a = -7$ alors $b = \frac{7}{a} = -1$ et si $a = 7$ alors $b = \frac{7}{a} = 1$, on retrouve les mêmes solutions.

Les solutions de $(1+i)z^2 - (3+i)z - 6 + 4i = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(3+i) - (7+i)}{2(1+i)} = -\frac{4}{2(1+i)} = -\frac{2}{1+i} = -\frac{2(1-i)}{1^2+1^2} = -1+i$$

$$z_2 = \frac{(3+i) + (7+i)}{2(1+i)} = \frac{10+2i}{2(1+i)} = \frac{5+i}{1+i} = \frac{(5+i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{5-5i+i+1}{1^2+1^2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$$

Allez à : Exercice 12 :

15.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-(9+3i))^2 - 4(1+2i)(-5i+10) = (3(3+i)^2) - 4(-5i+10+10+20i) \\ &= 9(9-1+6i) - 4(-25) = 9(8+6i) - 4(20+15i) = 72+54i-80-60i \\ &= -8-6i \end{aligned}$$

On pose $\delta = a + ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -8-6i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow -8-6i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-8-6i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{64+36} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{100} = 10$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 =$

1, d'où l'on tire $b^2 = 9$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 3 , d'après l'équation $2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -3$ et $\delta = 1 - 3i$ et si $a = -1$ alors $b = 3$ et $\delta = -1 + 3i$

Deuxième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{-3}{a}\right)^2 = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^4 - 9 = -8a^2 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 8a^2 - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 8A - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 + 8A - 9 = 0$ est

$\Delta' = 8^2 + 4 \times 9 = 100 = 10^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{-8-10}{2} = -9$ et $A_2 = \frac{-8+10}{2} = 1$, $A_2 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -9$, par contre $a^2 = 1$ admet deux solutions $a = -1$ et $a = 1$.

Si $a = -1$ alors $b = \frac{-3}{a} = 3$ et si $a = 1$ alors $b = \frac{-3}{a} = -1$, on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$\Delta = -8-6i = 1-6i-9 = (1-3i)^2$ donc $\delta = 1-3i$ et $\delta = -1+3i$

Les solutions de $(1+2i)z^2 - (9+3i)z - 5i + 10 = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(9+3i) - (1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{8+6i}{2(1+2i)} = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{4-8i+3i+6}{10} = 2-i$$

$$z_2 = \frac{(9+3i) + (1-3i)}{2(1+2i)} = \frac{10}{2(1+2i)} = \frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{1^2+2^2} = 1-2i$$

Allez à : Exercice 12 :

$$16. \Delta = -(6i + 2)^2 - 4(1 + 3i)(11i - 23) = (6i + 2)^2 - 4(11i - 23 - 33 - 69i) = -36 + 24i + 4 - 4(-56 - 58i) = -32 + 24i + 224 + 232i = 192 + 256i = 64(3 + 4i)$$

Si j'ai mis 64 en facteur, c'est que maintenant il suffit de trouver une racine deuxième de $3 + 4i$, ce qui est beaucoup plus facile que de trouver une racine deuxième de $192 + 256i$.

$$\text{On pose } \delta = a + ib, \Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$\text{On rajoute l'équation } |\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |3 + 4i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Avec le système } \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}, \text{ en faisant la somme des deux équations, on trouve } 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4,$$

d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1 , d'après l'équation $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 2$ alors $b = 1$ et $\delta = 2 + i$ et si $a = -2$ alors $b = -1$ et $\delta = -2 - i$

$$\text{Donc } (2 + i)^2 = 3 + 4i \text{ entraîne que } \Delta = 64(3 + 4i) = 8^2(2 + i)^2 = (8(2 + i))^2 = (16 + 8i)^2$$

Deuxième méthode

$$3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2 \text{ et on retrouve le même résultat.}$$

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4 = 3a^2 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 3A - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de $A^2 - 3A - 4 = 0$ sont $A_1 = -1 < 0$ et $A_2 = 4$, donc $a^2 = 4$,

Si $a = -2$ alors $b = \frac{2}{a} = -1$ et alors $\delta = -2 - i$, si $a = 2$ alors $b = \frac{2}{a} = 1$ et alors $\delta = 2 + i$.

Les solutions de $(1 + 3i)z^2 - (6i + 2)z + 11i - 23 = 0$ sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{6i + 2 - (16 + 8i)}{2(1 + 3i)} = \frac{-14 - 2i}{2(1 + 3i)} = \frac{-7 - i}{1 + 3i} = \frac{(-7 - i)(1 - 3i)}{1^2 + 3^2} = \frac{-7 + 21i - i - 3}{10} = \frac{-10 + 20i}{10} = -1 + 2i \\ z_2 &= \frac{6i + 2 + (16 + 8i)}{2(1 + 3i)} = \frac{18 + 14i}{2(1 + 3i)} = \frac{9 + 7i}{1 + 3i} = \frac{(9 + 7i)(1 - 3i)}{1^2 + 3^2} = \frac{9 - 27i + 7i + 21}{10} = \frac{30 - 20i}{10} = 3 - 2i \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

On pose $X = Z^2$,

$$Z^4 + (3 - 6i)Z^2 - 8 - 6i = 0 \Leftrightarrow X^2 + (3 - 6i)X - 8 - 6i = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = (3 - 6i)^2 - 4(-8 - 6i) = 9 - 36i - 36 + 32 + 24i = 5 - 12i$$

Les racines carrées de $5 - 12i$:

$$(a + ib)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ ab = 6 \end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3 , on trouve $2a^2 = 18$ donc $a^2 = 9$, c'est-à-dire $a = \pm 3$.

En soustrayant L_1 à L_3 , on trouve $2b^2 = 8$ donc $b^2 = 4$, c'est-à-dire $b = \pm 2$.

D'après L_2 , a et b ont le même signe donc les deux racines carrées de $5 - 12i$ sont : $3 + 2i$ et $-3 - 2i$.

Les solutions de $X^2 + (3 - 6i)X - 8 - 6i = 0$ sont :

$$X_1 = \frac{-(3-6i) - (3+2i)}{2} = -3 + 4i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(3-6i) + (3+2i)}{2} = 2i$$

Or $X_1 = -3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2+i)^2$ donc $Z^2 = -3 + 4i$ a deux solutions :

$$Z_1 = 2 + i$$

Et

$$Z_2 = -2 - i$$

De plus $X_2 = 2i = (1+i)^2$ donc $Z^2 = 2i$ a deux solutions :

$$Z_3 = 1 + i$$

Et

$$Z_4 = -1 - i$$

Allez à : **Exercice 13 :**

Correction exercice 14 :

1. On pose $X = a \in \mathbb{R}$

$$(1-i)a^3 - (5+i)a^2 + (4+6i)a - 4i = 0 \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 + 4a + i(-a^3 - a^2 + 6a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 5a^2 + 4a = 0 \\ -a^3 - a^2 + 6a - 4 = 0 \end{cases}$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5a^2 + 4) = 0$$

Donc cette équation admet 0, 1 et 4 comme racine. Seul 1 est solution de $-a^3 - a^2 + 6a - 4 = 0$ donc il existe une unique solution réelle $a = 1$.

2. On factorise $(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i$ par $X-1$. Il existe alors α, β et γ telle que :

$$(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i = (X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)$$

$$\text{Or } (X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) = \alpha X^3 + (\beta - \alpha)X^2 + (\gamma - \beta)X - \gamma$$

$$\text{On en déduit que : } \begin{cases} \alpha = 1-i \\ \beta - \alpha = -(5+i) \\ \gamma - \beta = 4+6i \\ -\gamma = -4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1-i \\ \beta = -(5+i) + 1-i = -4-2i \\ \gamma = 4+6i - 4 - 2i = 4i \\ \gamma = 4i \end{cases}$$

D'où

$$(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i = 0 \Leftrightarrow (X-1)((1-i)X^2 - (4+2i)X + 4i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ (1-i)X^2 - (4+2i)X + 4i = 0 \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré est :

$$\Delta = (4+2i)^2 - 4(1-i) \times 4i = 16 + 16i - 4 - 16i - 16 = -4 = (2i)^2$$

Les deux racines sont alors

$$X_1 = \frac{4+2i-2i}{2(1-i)} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{1^2+1^2} = 1+i$$

$$X_2 = \frac{4+2i+2i}{2(1-i)} = \frac{2+2i}{1-i} = \frac{2(1+i)^2}{1^2+1^2} = 2i$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1, 1+i, 2i\}$.

Allez à : **Exercice 14 :**

Correction exercice 15 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a^3 + (1-2i)a^2 - 3(1+i)a - 2 + 2i = 0 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 3a - 2 + i(-2a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 3a - 2 = 0 \\ -2a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $-2a^2 - 3a + 2 = 0$ sont $a_1 = -2$ et $a_2 = \frac{1}{2}$

$$(-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) - 2 = -8 + 4 + 6 - 2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{1+2-12-16}{8} = -\frac{25}{8} \neq 0$$

Donc seul -2 est solution de (E)

2. On peut diviser $X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i$ par $X+2$

$X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i$	$X + 2$
$X^3 + 2X^2$	$X^2 + (-1-2i)X - 1 + i$
$(-1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i$	
$(-1-2i)X^2 + 2(-1-2i)X$	
$(-1+i)X - 2 + 2i$	
$(-1+i)X - 2 + 2i$	
0	

Par conséquent

$$\begin{aligned} X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i &= (X+2)(X^2 + (-1-2i)X - 1 + i) \\ &= (X+2)(X^2 - (1+2i)X - 1 + i) \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc

$$\begin{aligned} X^2 - (1+2i)X + i - 1 &= 0 \\ \Delta &= (1+2i)^2 - 4(i-1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1 \\ X_1 &= \frac{1+2i-1}{2} = i \\ X_2 &= \frac{1+2i+1}{2} = 1+i \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 15 :**

Correction exercice 16 :

$$\Delta = (-i)^2 + 4(1+i) = 4 + 4i - 1 = (2+i)^2$$

Les solutions de $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$ sont

$$Z_1 = \frac{i+2+i}{2} = 1+i$$

$$Z_2 = \frac{i-(2+i)}{2} = -1$$

Les solutions de $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$ vérifient

$$\begin{aligned} z^3 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \sqrt{2} \\ \arg(z^3) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 3\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{6}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow z \in \left\{ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}} \right\} \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} z^3 = -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = 1 \\ \arg(z^3) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\arg(z) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{3}}; \quad z_1 = e^{\frac{3i\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1; \quad z_2 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Finalement il y a six solutions

$$\left\{ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}; 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{4}}; 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{17\pi}{12}}; e^{\frac{i\pi}{3}}; -1; e^{-\frac{i\pi}{3}} \right\}$$

Allez à : **Exercice 16 :**

Correction exercice 17 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ une solution de (E)

$$a^4 - 3a^3 + (2 - i)a^2 - 3 + i = 0 \Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 + i(-a^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$a_1 = -1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 3 = 0$ et $a_2 = 1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0$, donc (E) admet deux solutions réelles, on peut mettre $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$ en facteur.

2. Il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(aX^2 + bX + c)$$

On développe

$$(X^2 - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + (c - a)X^2 - bX - c$$

Par conséquent

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}$$

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(X^2 - 3X + 3 - i) = 0$$

Il reste à trouver les solutions de $X^2 - 3X + 3 - i = 0$

$$\Delta = 9 - 4(3 - i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$$

Les racines carrées du discriminant sont $\delta = \pm(1 + 2i)$

Il y a deux solutions

$$X_1 = \frac{3 - (1 + 2i)}{2} = 1 - i$$

$$X_2 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{-1, 1, 1 - i, 2 + i\}$$

Allez à : **Exercice 17 :**

Correction exercice 18 :

$$1. X^3 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

Donc

$$X^3 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(X) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k$$

$$= \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$X_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$X_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}$$

$$X_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

2.

$$X^3 = -8i = 2^3 e^{\frac{3i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^3 \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^3 \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3})}, \quad k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0 = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$$

$$X_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{\frac{7i\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$X_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3})} = 2e^{\frac{11i\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

3. On pose $X = Z^3$

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8+8i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2 + (1+3i)X + 8+8i = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (1+3i)^2 - 4 \times \frac{1}{2}(8+8i) = 1+6i-9-16-16i = -24-10i$$

Les racines carrées de $-24-10i$:

$$(a+ib)^2 = -24-10i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -24-10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ ab = -5 \end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2 + b^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3 , on trouve $2a^2 = 2$ donc $a^2 = 1$, c'est-à-dire $a = \pm 1$.En soustrayant L_1 à L_3 , on trouve $2b^2 = 50$ donc $b^2 = 25$, c'est-à-dire $b = \pm 5$.D'après L_2 , a et b sont de signes différents donc les deux racines carrées de $-24-10i$ sont : $1-5i$ et $-1+5i$.

L'équation du second degré a pour racine :

$$X_1 = \frac{-(1+3i) - (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2-2i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(1+3i) + (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2i$$

Les six racines de

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8+8i = 0$$

Sont les six complexes trouvés en 1°) et 2°).

Allez à : **Exercice 18 :****Correction exercice 19 :**

$$1. \text{ Posons } z = a \in \mathbb{R}, (E) \Leftrightarrow a^3 + 1 - i(a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 1 = 0 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1$$

2. On peut diviser $z^3 - iz + 1 - i = 0$ par $z + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 - iz + 1 - i & z + 1 \\
 \hline
 z^3 + z^2 & z^2 - z + 1 - i \\
 \hline
 -z^2 - iz + 1 - i & \\
 -z^2 - z & \\
 \hline
 (1 - i)z + 1 - i & \\
 (1 - i)z + 1 - i & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$z^2 - z + 1 - i$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1 - i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$

Les racines de ce polynôme sont :

$$z_1 = \frac{1 - (1 + 2i)}{2} = -i \text{ et } z_2 = \frac{1 + (1 + 2i)}{2} = 1 + i$$

Les solutions de (E) sont -1 , $1 + i$ et $-i$.

Allez à : **Exercice 19 :**

Correction exercice 20 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ une racine de (E)

$$\begin{aligned}
 x^4 - (3 + \sqrt{3})x^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)x^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)x - 2i &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^4 - (3 + \sqrt{3})x^3 + (2 + 3\sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x + i(-x^2 + 3x - 2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - (3 + \sqrt{3})x^3 + (2 + 3\sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x = 0 & (*) \\ -x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les racines de $-x^2 + 3x - 2 = 0$ sont après un petit calcul $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

$$1^4 - (3 + \sqrt{3})1^3 + (2 + 3\sqrt{3})1^2 - 2\sqrt{3} \times 1 = 1 - 3 - \sqrt{3} + 2 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

Donc 1 est racine de (*)

$$2^4 - (3 + \sqrt{3})2^3 + (2 + 3\sqrt{3})2^2 - 2\sqrt{3} \times 2 = 16 - 3 \times 8 - 8\sqrt{3} + 8 + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$$

Donc 2 est racine de (*)

2. On peut diviser le polynôme par $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - (3 + \sqrt{3})X^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)X^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)X - 2i & X^2 - 3X + 2 \\
 \hline
 X^4 & - 3X^3 & + 2X^2 & & & \\
 \hline
 -\sqrt{3}X^3 & + (3\sqrt{3} - i)X^2 & + (-2\sqrt{3} + 3i)X & - 2i & & \\
 -\sqrt{3}X^3 & + 3\sqrt{3}X^2 & - 2\sqrt{3}X & & & \\
 \hline
 & -iX^2 & + 3iX & - 2i & & \\
 & -iX^2 & + 3iX & - 2i & & \\
 \hline
 & & & & 0 &
 \end{array}$$

Il reste à déterminer les racines de $X^2 - \sqrt{3}X - i = 0$

$$\Delta = 3 + 4i = (2 + i)^2$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i = 1 - i \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{i}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i = -1 + i \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{i}{2}$$

$$S = \left\{ 1, 2, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{i}{2} \right\}$$

Allez à : **Exercice 20 :**

Correction exercice 21 :

1.

$$\begin{aligned}
 z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) + 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
 &= 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{2^2 - 3} = 2\sqrt{3} + 2i \\
 |z^2| &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4
 \end{aligned}$$

Si on pose $\theta = \arg(z^2)$, $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Autre méthode :

$$z^2 = 2\sqrt{3} + 2i = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

2.

On déduit de la première question que $|z^2| = 4$ donc $|z|^2 = 4$ et que $|z| = 2$. Et que les arguments possible de z sont $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \{0,1\}$, donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $z = -2e^{i\frac{\pi}{12}}$. Mais $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ entraîne que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs, donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3. D'après la question précédente

$$\begin{aligned}
 2e^{i\frac{\pi}{12}} &= \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1.

$$\begin{aligned}
 u^4 = -4 &\Leftrightarrow \begin{cases} |u^4| = |-4| \\ \arg(u^4) = \arg(-4) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|^4 = 4 \\ 4\arg(u) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |u| = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \arg(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il y a quatre solutions

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i \\
 u_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i \\
 u_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = -1 - i = \overline{u_1} \\
 u_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i = \overline{u_0}
 \end{aligned}$$

2.

$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^4 = -4(z-1)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^4 = -4$$

On pose $u = \frac{z+1}{z-1}$, il y a donc 4 solutions que l'on trouve en exprimant z en fonction de u .

$$u = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow u(z-1) = z+1 \Leftrightarrow zu - u = z+1 \Leftrightarrow zu - z = u+1 \Leftrightarrow z(u-1) = u+1 \Leftrightarrow z = \frac{u+1}{u-1}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{u_0+1}{u_0-1} = \frac{1+i+1}{1+i-1} = \frac{2+i}{i} = 1-2i \\ z_1 &= \frac{u_1+1}{u_1-1} = \frac{-1+i+1}{-1+i-1} = \frac{i}{-2+i} = \frac{i(-2-i)}{(-2)^2+1^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ z_2 &= \frac{u_2+1}{u_2-1} = \frac{\overline{u_1}+1}{\overline{u_1}-1} = \overline{z_1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ z_3 &= \frac{u_3+1}{u_3-1} = \frac{\overline{u_0}+1}{\overline{u_0}-1} = \overline{z_0} = 1+2i \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

1.

$$\begin{aligned} X^3 = -2\sqrt{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2\sqrt{2} \\ \arg(X^3) = \arg(-2\sqrt{2}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = (\sqrt{2})^2 \\ 3\arg(X) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = \sqrt{2} \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \end{aligned}$$

Les trois solutions sont

$$X_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}, \quad k \in \{0,1,2\}$$

Soit

$$\begin{aligned} X_0 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \\ X_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{3}} = -\sqrt{2} \\ X_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

2.

$$(z+i)^3 + 2\sqrt{2}(z-i)^3 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^3 = -2\sqrt{2}(z-i)^3 \Leftrightarrow \frac{(z+i)^3}{(z-i)^3} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = -2\sqrt{2}$$

On pose

$$X = \frac{z+i}{z-i}$$

Il faut trouver z en fonction de X

$$\begin{aligned} X = \frac{z+i}{z-i} &\Leftrightarrow X(z-i) = z+i \Leftrightarrow Xz - iX = z+i \Leftrightarrow Xz - z = iX + i \Leftrightarrow z(X-1) = i(X+1) \Leftrightarrow z = i\frac{X+1}{X-1} \end{aligned}$$

Il y a donc trois solutions

$$\begin{aligned}
z_0 &= i \frac{X_0 + 1}{X_0 - 1} = i \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} + 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} - 1} = i \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + i \frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + i \frac{\sqrt{6}}{2}} = i \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + i \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - i \frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \\
&= i \frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(1 + i \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = i \frac{\left(\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{6}{4} + i \sqrt{6}\right)\right)}{\frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 + \frac{6}{4}} = i \frac{1 - i \sqrt{6}}{3 - \sqrt{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{3 - \sqrt{2}} + i \frac{1}{3 - \sqrt{2}} \\
z_1 &= i \frac{X_1 + 1}{X_1 - 1} = i \frac{-\sqrt{2} + 1}{-\sqrt{2} - 1} = i \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = i \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = i(\sqrt{2} - 1)^2 = i(2 - 2\sqrt{2} + 1) \\
&= i(3 - 2\sqrt{2}) \\
z_2 &= i \frac{X_2 + 1}{X_2 - 1} = i \frac{\overline{X_0} + 1}{\overline{X_0} - 1} = i \frac{\overline{\left(\frac{X_0 + 1}{X_0 - 1}\right)}}{\overline{\left(\frac{X_0 + 1}{X_0 - 1}\right)}} = -\overline{\left(i \frac{X_0 + 1}{X_0 - 1}\right)} = -\overline{z_0} = -\frac{\sqrt{6}}{3 - \sqrt{2}} - i \frac{1}{3 - \sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 23 :**

Correction exercice 24 :

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1, i, -1, -i\}$.

2. $-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

$$\begin{aligned}
X^4 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^4| = \left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right| \\ \arg(X^4) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^4 = 1 \\ 4 \arg(X) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}
\end{aligned}$$

Il y a quatre solutions :

$$\begin{aligned}
X_0 &= e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\
X_1 &= e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \\
X_2 &= e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \\
X_3 &= e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Autre solution

$$-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = j^2. \text{ Donc } X^4 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow X^4 - j^2 = 0. \text{ Or}$$

$$X^4 - j^2 = (X^2 - j)(X^2 + j) = (X^2 - j^4)(X^2 - i^2 j^4) = (X - j^2)(X + j^2)(X - ij^2)(X + ij^2)$$

D'où les solutions :

$$X = j^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, X = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, X = i \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \text{ et } X = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

3. On pose $Y = X^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont

$$\delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow Y^2 + jY + j^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{j}\right)^2 + \frac{Y}{j} + 1 = 0$$

Les solutions de $T^2 + T + 1 = 0$ sont $T_1 = j$ et $T_2 = j^2$

Donc $\frac{Y_1}{j} = j \Leftrightarrow Y_1 = j^2$ et $\frac{Y_2}{j} = j^2 \Leftrightarrow Y_2 = j^3 = 1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : **Exercice 24 :**

Correction exercice 25 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 &= \left(\frac{1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{1+i}\right)^2 = \frac{(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))^2}{(1+i)^2} \\ &= \frac{(1-\sqrt{3})^2 - (1+\sqrt{3})^2 + 2i(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{1-1+2i} \\ &= \frac{1-2\sqrt{3}+3 - (1+2\sqrt{3}+3) + 2i(1-3)}{2i} = \frac{-4\sqrt{3}-4i}{2i} = -\frac{4(\sqrt{3}+i)}{2i} \\ &= 2i(\sqrt{3}+i) = -2+2i\sqrt{3} \\ \left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 &= -2+2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2 &= \left(1-\sqrt{3}\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \left(1-\sqrt{3}\frac{(1-i)^2}{1^2+1^2}\right)^2 = \left(1-\sqrt{3}\frac{1-2i-1}{2}\right)^2 \\ &= (1+i\sqrt{3})^2 = \left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 = (-2j^2)^2 = 4j^4 = 4j = 4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -2+2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 25 :**

Correction exercice 26 :

1.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2 + (-1)^2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc le module de $\frac{1+i}{1-i}$ est 1 et un argument est $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} 2010 &= 4 \times 502 + 2 \\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010} &= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4 \times 502 + 2} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{4 \times 502 + 2} = \left(\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4\right)^{502} \times \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = (e^{2i\pi})^{502} \times e^{i\pi} \\ &= 1^{502} \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (1+i\sqrt{3})^{2010} &= \left(2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{2010} = (2(-j^2))^{2010} = 2^{2010} \times j^{4020} = 2^{2010} j^{3 \times 1340} \\ &= 2^{2010} (j^3)^{1340} = 2^{2010} \times 1^{1340} = 2^{2010} \end{aligned}$$

3.

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_1^n = \left(2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{12}}$$

$$z_2 = 1 + j = -j^2$$

$$z_2^n = (-j^2)^n = (-1)^n j^{2n}$$

$$\text{Si } n \equiv 0 \pmod{6}, n = 6k, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k} = j^{12k} = (-1)^0 (j^3)^{4k} = 1^{4k} = 1$$

$$\text{Si } n \equiv 1 \pmod{6}, n = 6k + 1, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+1} = (-1)^1 j^{12k+2} = (-1)(j^3)^{4k} j^2 = -1^{4k} j^2 = -j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Si } n \equiv 2 \pmod{6}, n = 6k + 2, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+2} = (-1)^2 j^{12k+4} = (-1)^2 (j^3)^{4k} j^2 = 1^{4k} j^4 = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Si } n \equiv 3 \pmod{6}, n = 6k + 3, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+3} = (-1)^3 j^{12k+6} = (-1)^3 (j^3)^{4k} j^6 = -1^{4k} j^6 = -1$$

$$\text{Si } n \equiv 4 \pmod{6}, n = 6k + 4, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+4} = (-1)^4 j^{12k+8} = (j^3)^{4k} j^8 = 1^{4k} j^2 = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Si } n \equiv 5 \pmod{6}, n = 6k + 5, k \in \mathbb{Z}, z_2^{6k+5} = (-1)^5 j^{12k+10} = -(j^3)^{4k} j^{10} = -1^{4k} j = -j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)} = \frac{1+i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta) - i\sin(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

$$z_3^n = e^{2in\theta}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= 1 + \cos(\phi) + i\sin(\phi) = 2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{aligned}$$

$$z_4^n = \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{n\phi}{2}}$$

Remarque :

$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ n'est pas forcément le module de z_4 car $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ n'est positif que pour certaine valeur de ϕ .

Allez à : **Exercice 26 :**

Correction exercice 27 :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3} + i)^n &= \left(2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \right)^n = 2^n \left(e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^n = 2^n e^{\frac{ni\pi}{6}} \\
(\sqrt{3} + i)^n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow (\sqrt{3} + i)^n - \overline{(\sqrt{3} + i)^n} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{ni\pi}{6}} - e^{-\frac{ni\pi}{6}} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{6} \\
&= k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n}{6} = k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 6k \\
(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow (\sqrt{3} + i)^n + \overline{(\sqrt{3} + i)^n} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{ni\pi}{6}} + e^{-\frac{ni\pi}{6}} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n}{6} = \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 3 + 6k
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 27 :****Correction exercice 28 :**

$$\begin{aligned}
z &= \rho e^{i\theta} \\
z^k + \bar{z}^k &= \rho^k e^{ki\theta} + \rho^k e^{-ki\theta} = \rho^k (e^{ki\theta} + e^{-ki\theta}) = 2\rho^k \cos(k\theta) \\
(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n) &= 2\rho \cos(\theta) 2\rho^2 \cos(2\theta) \dots 2\rho^n \cos(n\theta) \\
&= 2^n \rho^{1+2+\dots+n} \cos(\theta) \cos(2\theta) \dots \cos(n\theta) = 2^n \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos(\theta) \cos(2\theta) \dots \cos(n\theta)
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 28 :****Correction exercice 29 :**

1.

$$\begin{aligned}
|1 + iz| = |1 - iz| &\Leftrightarrow |1 + iz|^2 = |1 - iz|^2 \Leftrightarrow (1 + iz)(\overline{1 + iz}) = (1 - iz)(\overline{1 - iz}) \\
&\Leftrightarrow (1 + iz)(1 - i\bar{z}) = (1 - iz)(1 + i\bar{z}) \Leftrightarrow 1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \\
&\Leftrightarrow -i\bar{z} + iz = i\bar{z} - iz \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2.

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^n = \frac{1 + ia}{1 - ia} \Rightarrow \left| \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^n \right| = \left| \frac{1 + ia}{1 - ia} \right| \Rightarrow \left| \frac{1 + iz}{1 - iz} \right|^n = 1 \Rightarrow |1 + iz| = |1 - iz| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

On pose $z = \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ (ce qui est toujours possible puisque pour $z \in \mathbb{R}$ il existe un unique $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $z = \tan(\theta)$) ainsi

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1 + i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1 - i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta)}{\cos(\theta) - i \sin(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

Et $a = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ ainsi

$$\frac{1 + ia}{1 - ia} = e^{2i\alpha}$$

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^n = \frac{1 + ia}{1 - ia} \Leftrightarrow e^{2in\theta} = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow 2n\theta = 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Donc les solutions sont

$$z_k = \tan\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}\right), k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Avec $a = \tan(\alpha)$

3.

$$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On peut aussi exprimer ce quotient sous forme algébrique et constater qu'il vaut $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On cherche les complexes tels que

$$z^3 = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = |e^{i\frac{\pi}{3}}| \\ \arg(z^3) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Il y a trois racines cubique de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$, $z_k = e^{i\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}}, k \in \{0,1,2\}$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{9}}; z_1 = e^{i\frac{7\pi}{9}}; z_2 = e^{i\frac{13\pi}{9}}$$

Allez à : **Exercice 29 :**

Correction exercice 30 :

On pose $Z = \frac{2z+1}{z-1}$, les solutions de $Z^4 = 1$ sont 1, i , -1 et $-i$ (ce sont les racines quatrième de l'unité)

$$Z = \frac{2z+1}{z-1} \Leftrightarrow (z-1)Z = 2z+1 \Leftrightarrow zZ - Z = 2z+1 \Leftrightarrow zZ - 2z = Z+1 \Leftrightarrow z(Z-2) = Z+1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{Z+1}{Z-2}$$

Il y a 4 solutions

$$z_0 = \frac{1+1}{1-2} = -2$$

$$z_1 = \frac{i+1}{i-2} = \frac{(i+1)(-i-2)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{1-2i-i-2}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

$$z_2 = \frac{-1+1}{-1-2} = 0$$

$$z_3 = \frac{-i+1}{-i-2} = \frac{(-i+1)(i-2)}{(-2)^2 + (-1)^2} = \frac{1+2i+i-2}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Allez à : **Exercice 30 :**

Correction exercice 31 :

Il faut d'abord écrire $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique

$$\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Première méthode

$$z^4 = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 \Leftrightarrow z^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = |4e^{i\frac{\pi}{3}}| \\ \arg(z^4) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 4 \\ 4\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}; z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}; z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\pi)} = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}; z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Deuxième méthode

$$\text{On pose } a = \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$z^4 = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 \Leftrightarrow z^4 = a^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{a} \in \{1, i, -1, -i\} \Leftrightarrow z \in \{a, ia, -a, -ia\}$$

$$ia = i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$-a = -\frac{1+\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$-ia = \frac{\sqrt{3}-1}{4} - i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Remarque :

En réunissant ces deux méthodes on pourrait en déduire les valeurs de $e^{i(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2})}$, $k \in \{0,1,2,3\}$.

Allez à : **Exercice 31 :**

Correction exercice 32 :

1.

$$u^2 = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow u = \pm 2e^{\frac{i\pi}{3}} = \pm 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm(1+i\sqrt{3})$$

2. On pose $u = \frac{z+i}{z-i}$

$$u = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow u(z-i) = z+i \Leftrightarrow uz - iu = z+i \Leftrightarrow uz - z = iu + i \Leftrightarrow z(u-1) = i(u+1) \Leftrightarrow z = i\frac{u+1}{u-1}$$

Il y a deux solutions

$$z_1 = i\frac{1+i\sqrt{3}+1}{1+i\sqrt{3}-1} = i\frac{2+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + i$$

$$z_2 = i\frac{-1-i\sqrt{3}+1}{-1-i\sqrt{3}-1} = i\frac{-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}(2-i\sqrt{3})}{2^2+(\sqrt{3})^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{7} + \frac{3}{7}i$$

Allez à : **Correction exercice 32 :**

Correction exercice 33 :

On pose $u = \frac{z-1}{z-i}$ et on cherche les solutions de $u^3 = -8$

$$u^3 = -8 \Leftrightarrow \begin{cases} |u^3| = |-8| \\ \arg(u^3) = \arg(-8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|^3 = 8 \\ 3\arg(u) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |u| = 2 \\ \arg(u) = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Il y a 3 solutions

$$u_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}; \quad u_1 = 2e^{i\pi} = -2 \quad \text{et} \quad u_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-i\sqrt{3}$$

$$u = \frac{z-1}{z-i} \Leftrightarrow u(z-i) = z-1 \Leftrightarrow uz - iu = z-1 \Leftrightarrow uz - z = -1 + iu \Leftrightarrow z(u-1) = -1 + iu \Leftrightarrow z = \frac{-1+iu}{u-1}$$

$$z_0 = \frac{-1 + iu_0}{u_0 - 1} = \frac{-1 + i(1 + i\sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 - \sqrt{3} + i}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$z_1 = \frac{-1 + iu_1}{u_1 - 1} = \frac{-1 - 2i}{-3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$z_2 = \frac{1 + iu_2}{u_2 - 1} = \frac{-1 + i(1 - i\sqrt{3})}{1 - i\sqrt{3} - 1} = \frac{-1 + \sqrt{3} + i}{-i\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + i \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. $X_k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, avec $k \in \{0,1,2\}$.

$$X_0 = 1, X_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = j, X_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

2. $\bar{j} = X_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = j^2$

3. $j^3 = 1$, puisque j est solution de $X^3 = 1$, donc $j \times j^2 = 1 \Rightarrow j = \frac{1}{j^2}$.

4. $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = \frac{0}{1-j} = 0$ car $j \neq 1$ et $j^3 = 1$.

Autre solution $1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

C'est moins bien car un résultat du cours est que la somme des racines n -ième de l'unité est nul, et, ici $1, j$ et j^2 sont les trois racines troisième de l'unité.

5. $\frac{1}{1+j} = \frac{1}{-j^2} = -j$, car $1 + j = -j^2$ et $\frac{1}{j^2} = j$.

6. La division euclidienne de n par trois dit qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2\}$ tel que $n = 3q + r$, donc $j^n = j^{3q+r} = (j^3)^q j^r = 1^q j^r = j^r$, autrement dit si $n \equiv 0 \pmod{3}$, $j^n = 1$ si $n \equiv 1 \pmod{3}$, $j^n = j$ et si $n \equiv 2 \pmod{3}$ alors $j^n = j^2$.

Allez à : Exercice 34 :

Correction exercice 35 :

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1 + i) \Leftrightarrow z^3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow z^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \left| \frac{1}{(\sqrt{2})^3} e^{\frac{3i\pi}{4}} \right| \\ \arg(z^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \\ 3 \arg(z) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Il y a trois solutions $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0,1,2\}$

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}; z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{11i\pi}{12}}; z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

$$(z_k)^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}\right)^4 = \frac{1}{4} e^{i\left(\pi + \frac{8k\pi}{3}\right)} = \frac{1}{4} e^{i\frac{(8k+3)\pi}{3}}$$

$$(z_0)^4 = \frac{1}{4} e^{i\pi} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}; (z_1)^4 = \frac{1}{4} e^{i\frac{11\pi}{3}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{3}} \notin \mathbb{R}; (z_2)^4 = \frac{1}{4} e^{i\frac{19\pi}{3}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$$

Il n'y a que z_0 dont la puissance quatrième est dans $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 35 :

Correction exercice 36 :

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1, i, -1, -i\}$.

2. $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

3.

$$X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^4| = \left| e^{\frac{4i\pi}{3}} \right| \\ \arg(X^4) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^4 = 1 \\ 4 \arg(X) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2})}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$X_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_1 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$X_2 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \pi)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_3 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2})} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2. \text{ Donc } X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow X^4 - j^2 = 0. \text{ Or}$$

$$X^4 - j^2 = (X^2 - j)(X^2 + j) = (X^2 - j^4)(X^2 - i^2j^4) = (X - j^2)(X + j^2)(X - ij^2)(X + ij^2)$$

D'où les solutions :

$$X = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, X = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, X = i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \text{ et } X = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

On pose $Y = X^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\text{Donc les solutions de } \delta^2 = \Delta \text{ sont } \delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow Y^2 + jY + j^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{j}\right)^2 + \frac{Y}{j} + 1 = 0$$

Les solutions de $T^2 + T + 1 = 0$ sont $T_1 = j$ et $T_2 = j^2$

Donc $\frac{Y_1}{j} = j \Leftrightarrow Y_1 = j^2$ et $\frac{Y_2}{j} = j^2 \Leftrightarrow Y_2 = j^3 = 1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : **Exercice 36 :**

Correction exercice 37 :

Là on a un problème parce qu'il n'est pas simple de mettre $11 + 2i$ sous forme trigonométrique, essayons tout de même :

$$|11 + 2i| = \sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125} = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5} = (\sqrt{5})^3$$

Si on appelle θ un argument de $11 + 2i$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{11}{5\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

Il ne s'agit pas d'un angle connu. Donc il va falloir être malin, on cherche $z = a + ib$ tel que

$$\begin{aligned} (a + ib)^3 &= 11 + 2i \Leftrightarrow a^3 + 3a^2(ib) + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = 11 + 2i \\ &\Leftrightarrow a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3) = 11 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 11 \\ 3a^2b - b^3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On sait aussi que

$$|(a + ib)^3| = |11 + 2i| \Leftrightarrow |a + ib|^3 = (\sqrt{5})^3 \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2})^3 = (\sqrt{5})^3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5$$

On remplace $a^2 = 5 - b^2$ dans $3a^2b - b^3 = 2$

$$3(5 - b^2)b - b^3 = 2 \Leftrightarrow -4b^3 + 15b = 2 \Leftrightarrow 4b^3 - 15b + 2 = 0$$

Il y a une racine presque évidente $b = -2$, si on ne la voit pas on peut aussi remplacer $b^2 = 5 - a^2$ dans $a^3 - 3ab^2 = 11$

$$a^3 - 3a(5 - a^2) = 11 \Leftrightarrow 4a^3 - 15a - 11 = 0$$

Là c'est plus clair, $a_0 = -1$ est solution donc on peut factoriser par $a + 1$

$$4a^3 - 15a - 11 = (a + 1)(4a^2 - 4a - 11)$$

(C'est facile à factoriser)

Les racines de $4a^2 - 4a - 11$ sont $a_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ et $a_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$

Pour trouver les valeurs de b correspondantes on réutilise l'équation

$$3a^2b - b^3 = 2 \Leftrightarrow b(3a^2 - b^2) = 2 \Leftrightarrow b(3a^2 - (5 - a^2)) = 2 \Leftrightarrow b = \frac{2}{4a^2 - 5}$$

$$a = -1 \Rightarrow b = \frac{2}{4(-1)^2 - 5} = -2$$

$$\begin{aligned} a = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \Rightarrow b &= \frac{2}{4\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2 - 5} = \frac{2}{4\left(\frac{1}{4} - \sqrt{3} + 4\right) - 5} = \frac{2}{12 - 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{9 - 3} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

$$a = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{2}{4\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)^2 - 5} = \frac{2}{4\left(\frac{1}{4} + \sqrt{3} + 4\right) - 5} = \frac{2}{12 + 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{9 - 3} \\ = \frac{3 - \sqrt{3}}{12}$$

Pour bien faire, il faudrait faire la réciproque (parce que les équivalences ne sont pas claires), admis.

$11 + 2i$ admet trois racines cubiques

$$-1 - 2i; \frac{1}{2} - \sqrt{3} + i \frac{3 + \sqrt{3}}{12}; \frac{1}{2} + \sqrt{3} + i \frac{3 - \sqrt{3}}{12}$$

Allez à : **Exercice 37 :**

Correction exercice 38 :

$$\frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}} = \frac{2(1 + i\sqrt{3})}{\sqrt{2}(1 + i)} = \sqrt{2} \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}) \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3}) + i \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \sqrt{3})$$

On déduit de ces deux égalités que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

Puis que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \sqrt{3})}{\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3})} = \frac{(-1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{-1 + 2\sqrt{3} - 3}{1 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

Et enfin que

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

Allez à : **Exercice 38 :**

Correction exercice 39 :

On cherche les complexes z tels que $z^4 = 81$

$$z^4 = 81 \Leftrightarrow z^4 - 9^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 9)(z^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 3^2)(z^2 - (3i)^2) = 0 \\ \Leftrightarrow (z - 3)(z + 3)(z - 3i)(z + 3i) = 0$$

Il y a 4 racines quatrième de 81 : 3, -3, 3i et -3i

La même méthode ne marche pas pour les racines quatrième de -81.

$$z^4 = -81 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = |-81| \\ \arg(z^4) = \arg(-81) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 81 = 3^4 \\ 4 \arg(z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 3 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

Il y a 4 racines quatrième de -81 : $z_k = 3e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
z_0 &= 3e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(1+i) \\
z_1 &= 3e^{i\frac{3\pi}{4}} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(-1+i) \\
z_2 &= 3e^{i\frac{5\pi}{4}} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}(1+i) \\
z_3 &= 3e^{i\frac{7\pi}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(1-i)
\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 39 :

Correction exercice 40 :

1.

a. $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}.$

b.

$$\begin{aligned}
z^n = -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) = \arg(-1) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n \arg(z) = \pi + 2k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a n solutions $z_k = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Soit encore $z_k = e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

2. Première solution $z^{2n} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = 1 \\ z^n = -1 \end{cases}$

La somme des racines $2n$ -ième de l'unité (qui est nulle) est la somme des racines n -ième de l'unité (qui est nulle) plus la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$, donc la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$ est nulle.

Deuxième solution

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} &= e^{\frac{i\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} \\
&= e^{\frac{i\pi}{n}} \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0
\end{aligned}$$

Car $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ pour $n \geq 2$.

Allez à : Exercice 40 :

Correction exercice 41 :

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison z^2 , $z^2 \neq 1$ car $z \neq -1$ d'après l'énoncé et $z \neq 1$ car 1 n'est pas une racine n -ième de -1 .

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (z^2)^k = \frac{1 - (z^2)^n}{1 - z^2} = \frac{1 - z^{2n}}{1 - z^2}$$

Or $z^n = -1$ donc $(z^n)^2 = z^{2n} = 1$, par conséquent $S_n = 0$

Allez à : Exercice 41 :

Correction exercice 42 :

1. On pose $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$

$$z_2^3 = z_1^3 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2^3| = |z_1^3| \\ \arg(z_2^3) = \arg(z_1^3) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2|^3 = |z_1|^3 \\ 3\arg(z_2) = 3\arg(z_1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_2| = |z_1| \\ \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

Donc

$$z_2 = |z_1|e^{i(\arg(z_1) + \frac{2k\pi}{3})} = |z_1|e^{i\arg(z_1)}e^{\frac{2ik\pi}{3}} = z_1 \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^k = z_1 j^k$$

Les solutions sont $z_2 = z_1$, $z_2 = jz_1$ et $z_2 = j^2z_1$

De même les solutions de $z_3^3 = z_1^3$ sont $z_3 = z_1$, $z_3 = jz_1$ et $z_3 = j^2z_1$

2. $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$

On pose $Z = z^3$

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = (7-i)^2 - 4(-8-8i) = 49 - 14i - 1 + 32 + 32i = 80 + 18i = 81 + 2 \times 9i - 1 = (9+i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-(7-i) - (9+i)}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

$$Z_2 = \frac{-(7-i) + (9+i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

On cherche alors les z tels que $z^3 = -8 = (2i)^3$ et les z tels que

$$z^3 = 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^3$$

D'après la première question

$$z^3 = (-2)^3 \Leftrightarrow z \in \{-2, -2j, -2j^2\}$$

$$z^3 = \left(2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^3 \Leftrightarrow z \in \left\{ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}, j 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}, j^2 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \right\}$$

On peut arranger ces deux dernières solutions

$$j 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3})} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{9i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i 2^{\frac{1}{6}}$$

$$j^2 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4i\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3})} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{17i\pi}{12}}$$

Bref l'ensemble des solutions est

$$\left\{ -2, -2j, -2j^2, 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}, -i 2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{17i\pi}{12}} \right\}$$

Allez à : **Exercice 42 :**

Correction exercice 43 :

On ne peut pas trouver la forme trigonométrique de $-7 - 24i$.

$$-7 - 24i = 9 - 2 \times 12i - 16 = (3 - 4i)^2 = (4 - 4i - 1)^2 = ((2 - i)^2)^2 = (2 - i)^4$$

On cherche les z qui vérifient $z^4 = (2 - i)^4$

$$z^4 = (2 - i)^4 \Leftrightarrow z^4 - (2 - i)^4 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - (2 - i)^2)(z^2 + (2 - i)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - (2 - i)^2)(z^2 + i^2(2 - i)^2) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - (2 - i)^2)(z^2 - (2i + 1)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - (2 - i))(z + (2 - i))(z - (2i + 1))(z + (2i + 1)) = 0$$

L'ensemble des solutions est

$$\{2 - i, -2 + i, 1 + 2i, -1 - 2i\}$$

Allez à : **Exercice 43 :**

Correction exercice 44 :

Il faut mettre $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ sous sa forme trigonométrique.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Autre méthode

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} &\Leftrightarrow z^6 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^6| = 1 \\ \arg(z^6) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^6 = 1 \\ 6\arg(z) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions sont

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned} z^4 = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = 2^{-\frac{1}{2}} \\ \arg(z^4) = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 2^{-\frac{1}{2}} \\ 4\arg(z) = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{8}} \\ \arg(z) = -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0,1,2,3\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a 4 solutions

$$\begin{aligned} z_k &= 2^{-\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\} \\ z^6 + 27 = 0 &\Leftrightarrow z^6 = -27 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^6| = |-27| \\ \arg(z^6) = \arg(-27) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^6 = 27 = 3^3 \\ 6\arg(z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a 6 solutions

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ z_0 &= \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 &= \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}} = i\sqrt{3} \\ z_2 &= \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$z_3 = \sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4 = \sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i\sqrt{3}$$

$$z_5 = \sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^6 = -27(z-1)^6 \Leftrightarrow \frac{(z+1)^6}{(z-1)^6} = -27 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27$$

On pose $Z = \frac{z+1}{z-1}$

$$\begin{aligned} Z^6 = -27 &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z^6| = |-27| \\ \arg(Z^6) = \arg(-27) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z|^6 = 27 = 3^3 \\ 6\arg(Z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = (3^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{3} \\ \arg(Z) = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a 6 solutions

$$Z_k = \sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Il faut alors trouver z en fonction de Z ,

$$\begin{aligned} Z = \frac{z+1}{z-1} &\Leftrightarrow Z(z-1) = z+1 \Leftrightarrow Zz - Z = z+1 \Leftrightarrow Zz - z = Z+1 \Leftrightarrow z(Z-1) = Z+1 \Leftrightarrow z \\ &= \frac{Z+1}{Z-1} \end{aligned}$$

Il y a 6 solutions

$$\begin{aligned} z_k = \frac{Z_k + 1}{Z_k - 1} &= \frac{(Z_k + 1)(\overline{Z_k} - 1)}{(Z_k - 1)(\overline{Z_k} - 1)} = \frac{Z_k \overline{Z_k} - Z_k + \overline{Z_k} - 1}{Z_k \overline{Z_k} - Z_k - \overline{Z_k} + 1} = \frac{|Z_k|^2 - (Z_k - \overline{Z_k}) - 1}{|Z_k|^2 - (Z_k + \overline{Z_k}) + 1} \\ &= \frac{|Z_k|^2 - 2i\operatorname{Im}(Z_k) - 1}{|Z_k|^2 - 2\operatorname{Re}(Z_k) + 1} = \frac{3 - 2i\operatorname{Im}(Z_k) - 1}{3 - 2\operatorname{Re}(Z_k) + 1} = \frac{2 - 2i\operatorname{Im}(Z_k)}{4 - 2\operatorname{Re}(Z_k)} = \frac{1 - i\operatorname{Im}(Z_k)}{2 - \operatorname{Re}(Z_k)} \end{aligned}$$

$$Z_0 = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_0 = \frac{1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 2 - i\sqrt{3}$$

$$Z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}} = i\sqrt{3} \Rightarrow z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2 = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{7} - i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_3 = \sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_3 = \frac{1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_4 = \sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i\sqrt{3} \Rightarrow z_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_5 = \sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_5 = \frac{1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 2 + i\sqrt{3}$$

Allez à : Exercice 44 :

Correction exercice 45 :

1. Ce sont les racines cinquièmes de l'unité, il vaut mieux connaître la formule $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Sinon il faut absolument retrouver la formule très rapidement

$$\begin{aligned} z^5 = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = |1| \\ \arg(z^5) = \arg(1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = 1 \\ 5\arg(z) = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$, c'est-à-dire

$$z_0 = 1; z_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}; z_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}; z_3 = e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = \overline{z_3}; z_4 = e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = \overline{z_1}$$

2.

$$\begin{aligned} z^5 = 1 - i &\Leftrightarrow z^5 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow z^5 = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(z^5) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 5\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z_k = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)}, \quad k \in \{0,1,2,3,4\} \end{aligned}$$

Il y a cinq solutions

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{\pi}{20}}; z_1 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{9\pi}{20}}; z_2 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{17\pi}{20}}; z_3 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{25\pi}{20}} = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{5\pi}{4}} = -2^{\frac{1}{10}} \times \sqrt{2}(1+i) \\ &= -2^{\frac{1}{10} + \frac{1}{2}}(1+i) = -2^{\frac{3}{5}}(1+i); z_4 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{32\pi}{20}} = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{8\pi}{5}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z^3 = 2 - 2i &\Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow z^3 = (\sqrt{2})^3 e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = (\sqrt{2})^3 \\ \arg(z^3) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = (\sqrt{2})^3 \\ 3\arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a trois solutions $z_k = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0,1,2\}$

$$z_0 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{12}}; z_1 = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}; z_2 = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{15\pi}{12}} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

4.

$$\begin{aligned} z^5 = \overline{z} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = |\overline{z}| \\ \arg(z^5) = \arg(\overline{z}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = |z| \\ 5\arg(z) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (|z|^4 - 1)|z| = 0 \\ 6\arg(z) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 - 1 = 0 \text{ ou } |z| = 0 \\ \arg(z) = \frac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \{z = 0 \text{ ou } \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a 6 solutions : $z = 0$ et $z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}$, $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$$\begin{aligned} z &= 0; z_0 = 1; z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ z_3 &= e^{i\pi} = -1; z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 45 :**

Correction exercice 46 :

1. On cherche les complexes tels que

$$z^n = -i \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = |-i| \\ \arg(z^n) = \arg(-i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = -\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Les solutions sont les

$$z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

On cherche les complexes tels que

$$z^n = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = \sqrt{2} \\ \arg(z^n) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \\ n \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{2n}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Les solutions sont les

$$z_k = 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

2. $z^2 - z + 1 - i = 0$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1 - i) = -3 - 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1 = \frac{1 - (1 + 2i)}{2} = -i$$

$$z_2 = \frac{1 + 1 + 2i}{2} = 1 + i$$

3. $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$, on pose $Z = z^n$

$$z^{2n} - z^n + 1 - i = 0 \Leftrightarrow Z^2 - Z + 1 - i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = -i \\ \text{ou} \\ Z = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = -i \\ \text{ou} \\ z^n = 1 + i \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ e^{i\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k'\pi}{n}\right)}, k' \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Allez à : **Exercice 46 :**

Correction exercice 47 :

- 1.

$$(z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n - (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})$$

$$= z^n - 1$$

Donc

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

Il s'agit de la formule connue donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

- 2.

$$e^{ix} - 1 = e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right) = e^{\frac{ix}{2}} \times 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2ie^{\frac{ix}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

3.

$$\begin{aligned} Z_n &= 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{(n-1)ix} = 1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \dots + (e^{ix})^n = \frac{(e^{ix})^n - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{\frac{inx}{2}} \left(e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}} \right)}{e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right)} = e^{\frac{inx}{2} - \frac{ix}{2}} \frac{2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{\frac{(n-1)ix}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \left(\cos((n-1)x) + i \sin((n-1)x) \right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \cos((n-1)x) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i \sin((n-1)x) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Comme

$$X_n + iY_n = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{(n-1)ix}$$

On a

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos((n-1)x) = \cos((n-1)x) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Et

$$\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin((n-1)x) = \sin((n-1)x) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Allez à : Exercice 47 :

Correction exercice 48 :

1. D'après le cours, il existe $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\alpha = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$.
2. Comme $\alpha \neq 1$

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \frac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha} = \frac{1 - 1}{1 - \alpha} = 0$$

3. $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$ d'une part et pour tout $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{1 - x^6}{1 - x}$$

On a

$$f'(x) = \frac{-6x^5(1-x) - (1-x^6)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-6x^5 + 6x^6 + 1 - x^6}{(1-x)^2} = \frac{-6x^5 + 5x^6 + 1}{(1-x)^2}$$

On obtient donc l'égalité

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = \frac{-6x^5 + 5x^6 + 1}{(1-x)^2}$$

On prend $x = \alpha$

$$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4 = \frac{-6\alpha^5 + 5\alpha^6 + 1}{(1-\alpha)^2} = \frac{-6 + 5\alpha + 1}{(1-\alpha)^2}$$

Car $\alpha^5 = 1$ et $\alpha^6 = \alpha^5 \times \alpha = \alpha$, par conséquent

$$\begin{aligned}
1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4 &= \frac{-5 + 5\alpha}{(1 - \alpha)^2} = -5 \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha)^2} = -\frac{5}{1 - \alpha} = -5 \frac{1 - e^{-\frac{2ik\pi}{5}}}{\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2ik\pi}{5}}\right)} \\
&= -5 \frac{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{5}} - e^{-\frac{2ik\pi}{5}} + 1} = -5 \frac{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)} \\
&= -\frac{5}{2} - i \frac{5 \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{2\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right)} = -\frac{5}{2} - i \frac{10 \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2} i \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 48 :**

Correction exercice 49 :

Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \\
f'(x) &= 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \frac{(-(n+1)x^n)(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

On prend cette fonction en ϵ , et on rappelle que $\epsilon^n = 1$ (et que donc $\epsilon^{n+1} = \epsilon$)

$$\begin{aligned}
1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \dots + n\epsilon^{n-1} &= \frac{-(n+1)\epsilon^n + n\epsilon^{n+1} + 1}{(1-\epsilon)^2} = \frac{-(n+1) + n\epsilon + 1}{(1-\epsilon)^2} = \frac{-n + n\epsilon}{(1-\epsilon)^2} \\
&= -n \frac{1 - \epsilon}{(1-\epsilon)^2} = -\frac{n}{1-\epsilon}
\end{aligned}$$

Ce résultat est relativement satisfaisant mais on va tout de même l'écrire sous forme algébrique.

Comme $|\epsilon| = 1$

$$|\epsilon| = 1 \Leftrightarrow |\epsilon|^2 = 1 \Leftrightarrow \epsilon \bar{\epsilon} = 1 \Leftrightarrow \bar{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} = \frac{\epsilon^{n-1}}{\epsilon \epsilon^{n-1}} = \frac{\epsilon^{n-1}}{\epsilon^n} = \epsilon^{n-1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\epsilon} &= \frac{1-\bar{\epsilon}}{(1-\epsilon)(1-\bar{\epsilon})} = \frac{1-\epsilon^{n-1}}{1-(\epsilon+\bar{\epsilon})+|\epsilon|^2} = \frac{1-\epsilon^{n-1}}{2-2\operatorname{Re}(\epsilon)} \\
1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \dots + n\epsilon^{n-1} &= -n \times \frac{1-\epsilon^{n-1}}{2-2\operatorname{Re}(\epsilon)}
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 49 :**

Correction exercice 50 :

Pour $z \neq 1$

$$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

On pose $Z = \frac{z+1}{z-1}$,

Par conséquent Z est une racine n -ième de l'unité et donc $Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\frac{z+1}{z-1} = Z \Leftrightarrow z+1 = Z(z-1) \Leftrightarrow z+1 = Zz - Z \Leftrightarrow z(1-Z) = -(1+Z) \Leftrightarrow z = \frac{Z+1}{Z-1}$$

Ces équivalences sont vraies si $z \neq 1$ et $Z \neq 1$. Il faut faire un cas particulier si $k = 0$ car alors $Z = 1$.

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{1, \dots, n-1\}$$

$$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right)} = \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Si $k = 0$, $\frac{z+1}{z-1} = 1$ n'a pas de solution.

On trouve $n - 1$ solutions, ce qui n'est pas une contradiction car

$$(z + 1)^n = (z - 1)^n \Leftrightarrow (z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$$

Est une équation polynômiale de degré $n - 1$ (puisque les z^n se simplifient), est admet donc au plus $n - 1$ solutions.

Allez à : **Exercice 50 :**

Correction exercice 51 :

$$\begin{aligned} z^n = \bar{z} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = |\bar{z}| \\ \arg(z^n) = \arg(\bar{z}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = |z| \\ n \arg(z) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^{n-1} = 1 \text{ ou } |z| = 0 \\ n \arg(z) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \begin{cases} |z| = 1 \\ (n+1) \arg(z) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{2k\pi}{n+1}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions sont $z = 0$ et les $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Allez à : **Exercice 51 :**

Correction exercice 52 :

On rappelle que

$$\begin{aligned} 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 &= 0 \\ \frac{\beta}{1 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{1 + \beta^4} + \frac{\beta^3}{1 + \beta^6} &= \frac{\beta(1 + \beta^4)(1 + \beta^6) + \beta^2(1 + \beta^2)(1 + \beta^6) + \beta^3(1 + \beta^2)(1 + \beta^4)}{(1 + \beta^2)(1 + \beta^4)(1 + \beta^6)} \\ &= \frac{\beta^{11} + \beta^7 + \beta^5 + \beta + \beta^{10} + \beta^8 + \beta^4 + \beta^2 + \beta^9 + \beta^7 + \beta^5 + \beta^3}{\beta^{12} + \beta^{10} + \beta^8 + 2\beta^6 + \beta^4 + \beta^2 + 1} \\ &= \frac{\beta^4 + 1 + \beta^5 + \beta + \beta^3 + \beta + \beta^4 + \beta^2 + \beta^2 + 1 + \beta^5 + \beta^3}{\beta^5 + \beta^3 + \beta + 2\beta^6 + \beta^4 + \beta^2 + 1} \\ &= \frac{2(1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5)}{\beta^6} = -\frac{2\beta^6}{\beta^6} = -2 \end{aligned}$$

Cette solution n'est pas élégante du tout, il doit y avoir plus malin.

Allez à : **Exercice 52 :**

Correction exercice 53 :

$$\begin{aligned} A(X) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8} \\ &= \frac{e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} = \frac{2 \cos(3x) + 3 \times 2 \cos(x)}{8} \\ &= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\
&= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i} = \frac{2i \sin(3x) - 3 \times 2i \sin(x)}{-8i} \\
&= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) \\
C(X) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + 4e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2 \cos(4x) + 4 \times 2 \cos(2x) + 6}{16} \\
&= \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \\
D(X) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + 4e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2 \cos(4x) - 4 \times 2 \cos(2x) + 6}{16} \\
&= \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \\
E(x) &= \cos^2(x) \sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\
&= \frac{e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{4} \times \frac{e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{-4} = \frac{(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})}{-16} \\
&= \frac{e^{2ix}e^{2ix} - 2e^{2ix} + e^{2ix}e^{-2ix} + 2e^{2ix} - 4 + 2e^{-2ix} + e^{-2ix}e^{2ix} - 2e^{-2ix} + e^{-2ix}e^{-2ix}}{-16} \\
&= \frac{e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1 + 2e^{2ix} - 4 + 2e^{-2ix} + 1 - 2e^{-2ix} + e^{-4ix}}{-16} = \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 2}{-16} \\
&= \frac{2 \cos(4x) - 2}{-16} = -\frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Autre méthode en utilisant les formules trigonométriques

$$\begin{aligned}
E(x) &= \cos^2(x) \sin^2(x) = (\cos(x) \sin(x))^2 = \left(\frac{1}{2} \sin(2x) \right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos(4x)}{2} \\
&= -\frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

En utilisant les formules

$$\begin{aligned}
\sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a), a = x \\
\cos(2a) &= 1 - \sin^2(a) \Leftrightarrow \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, a = 2x \\
F(x) &= \cos(x) \sin^3(x) = \cos(x) B(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\
&= \frac{e^{4ix} - 3e^{2ix} + 3 - e^{-2ix} + e^{2ix} - 3 + 3e^{-2ix} - e^{-4ix}}{-16i} \\
&= \frac{e^{4ix} - e^{-4ix} - 2(e^{2ix} - e^{-2ix})}{-16i} = \frac{2i \sin(4x) - 2 \times 2i \sin(2x)}{-16i} \\
&= -\frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= \cos^3(x) \sin(x) = A(x) \sin(x) = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} \times \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{4ix} - e^{2ix} + 3e^{2ix} - 3 + 3 - 3e^{-2ix} + e^{-2ix} - e^{-4ix}}{16i} \\
&= \frac{e^{4ix} - e^{-4ix} + 2(e^{2ix} - e^{-2ix})}{16i} = \frac{2i \sin(4x) + 2 \times 2i \sin(2x)}{16i} \\
&= \frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x)
\end{aligned}$$

On peut toujours faire « comme d'habitude » améliorons un peu les choses

$$\begin{aligned}
H(x) &= \cos^3(x) \sin^2(x) = \cos(x) (\cos(x) \sin(x))^2 = \cos(x) \left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right)^2 = \frac{1}{4} \cos(x) \sin^2(2x) \\
&= \frac{1}{4} \cos(x) \left(\frac{1 - \cos(4x)}{2}\right) = \frac{1}{8} \cos(x) (1 - \cos(4x)) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{8} \cos(x) \cos(4x)
\end{aligned}$$

Alors on utilise des formules souvent inconnues des étudiants (et c'est fort dommage) ou on fait comme d'habitude

$$\begin{aligned}
H(x) &= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{8} \cos(x) \cos(4x) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{8} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-3ix} + e^{3ix} + e^{-5ix}) \\
&= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-5ix} + e^{-3ix} + e^{3ix}) \\
&= \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{32} (2 \cos(5x) + 2 \cos(3x)) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{1}{16} \cos(5x) - \frac{1}{16} \cos(3x) \\
I(x) &= \cos^2(x) \sin^3(x)
\end{aligned}$$

Allez, encore une autre technique !

On pose $t = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = t - \frac{\pi}{2}$ ainsi $\cos(x) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(t)$ et $\sin(x) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t)$

Donc

$$\begin{aligned}
I(x) &= \sin^2(t) \cos^3(t) = \frac{1}{8} \cos(t) - \frac{1}{16} \cos(5t) - \frac{1}{16} \cos(3t) \\
&= \frac{1}{8} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{16} \cos\left(5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{16} \cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} \cos\left(5x - \frac{5\pi}{2}\right) - \frac{1}{16} \cos\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{16} \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8} \sin(x) - \frac{1}{16} \sin(5x) + \frac{1}{16} \sin(3x) \\
J(x) &= \cos(x) \sin^4(x) = \cos(x) D(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 6}{16} \\
&= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-3ix} - 4e^{3ix} - 4e^{-ix} + 6e^{ix} + e^{3ix} + e^{-5ix} - 4e^{ix} - 4e^{-3ix} + 6e^{-ix}) \\
&= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-5ix} - 3(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 2(e^{ix} + e^{-ix})) \\
&= \frac{1}{32} (2 \cos(5x) - 3 \times 2 \cos(3x) + 2 \times 2 \cos(x)) \\
&= \frac{1}{16} \cos(5x) - \frac{3}{32} \cos(3x) + \frac{1}{8} \cos(x)
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 53 :**

Correction exercice 54 :

$$1. \frac{1-z}{1-iz} \text{ est réel si et seulement si } \frac{1-z}{1-iz} = \overline{\left(\frac{1-z}{1-iz}\right)} = \frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}}$$

$$\frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}} \Leftrightarrow (1-z)(1+i\bar{z}) = (1-\bar{z})(1-iz) \Leftrightarrow 1+i\bar{z}-z-iz\bar{z} = 1-iz-\bar{z}+iz\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow i\bar{z}-z-iz\bar{z} = -iz-\bar{z}+iz\bar{z} \Leftrightarrow i(z+\bar{z})-2i|z|^2 = z-\bar{z}$$

On pose $z = a + ib$

$$\frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}} \Leftrightarrow 2ia - 2i(a^2 + b^2) = 2ib \Leftrightarrow a - (a^2 + b^2) = b \Leftrightarrow a^2 - a + b^2 + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Il s'agit du cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. $\frac{1-z}{1-iz}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{1-z}{1-iz} = -\overline{\left(\frac{1-z}{1-iz}\right)} = -\frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}}$

$$\frac{1-z}{1-iz} = -\frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}} \Leftrightarrow (1-z)(1+i\bar{z}) = -(1-\bar{z})(1-iz) \Leftrightarrow 1+i\bar{z}-z-iz\bar{z}$$

$$= -(1-iz-\bar{z}+iz\bar{z}) \Leftrightarrow 1+i\bar{z}-z-iz\bar{z} = -1+iz+\bar{z}-iz\bar{z} \Leftrightarrow 1+i\bar{z}-z$$

$$= -1+iz+\bar{z} \Leftrightarrow 2-i(z-\bar{z}) = z+\bar{z}$$

On pose $z = a + ib$

$$\frac{1-z}{1-iz} = -\frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}} \Leftrightarrow 2-i(a+ib-a+ib) = 2a \Leftrightarrow 2+2b = 2a \Leftrightarrow 1 = a-b$$

Il s'agit de la droite d'équation : $b = -1 + a$.

Allez à : **Exercice 54 :**

Correction exercice 55 :

$$z = \frac{1 + \rho e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}} = \frac{(1 + \rho e^{i\theta})(1 - \rho e^{-i\theta})}{(1 - \rho e^{i\theta})(1 - \rho e^{-i\theta})} = \frac{1 + \rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta} - \rho^2}{1 - \rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta} + \rho^2} = \frac{1 + \rho(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) - \rho^2}{1 - \rho(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \rho^2}$$

$$= \frac{1 - \rho^2 + 2i\rho \sin(\theta)}{1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2} = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2} + i \frac{2\rho \sin(\theta)}{1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2}$$

Donc la partie réelle de z est

$$Re(z) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2}$$

Et sa partie imaginaire est

$$Im(z) = \frac{2\rho \sin(\theta)}{1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2}$$

Allez à : **Exercice 55 :**

Correction exercice 56 :

1. $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \Rightarrow (1+i)^6 = ((1+i)^2)^3 = (2i)^3 = 8 \times i^3 = -8i$

2. $z^2 = -8i \Leftrightarrow z^2 = (1+i)^6 \Leftrightarrow z^2 = ((1+i)^3)^2 \Leftrightarrow z = (1+i)^3$ ou $z = -(1+i)^3$

$$\Leftrightarrow z = (1+i)^2(1+i) \text{ ou } z = -(1+i)^2(1+i) \Leftrightarrow z = 2i(1+i) \text{ ou } z = -2i(1+i)$$

$$\Leftrightarrow z = -2 + 2i \text{ ou } z = 2 - 2i$$

3.

$$z = -2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

$$z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} e^{\frac{7i\pi}{4}} = 2\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

4.

$$z^3 = -8i \Leftrightarrow z^3 = ((1+i)^2)^3 \Leftrightarrow z^3 = (2i)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{2i}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{2i} = 1 \text{ ou } \frac{z}{2i} = j \text{ ou } \frac{z}{2i} = j^2$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = 2ij \text{ ou } z = 2ij^2 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = 2i \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ ou } z = 2i \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -\sqrt{3} - i \text{ ou } z = \sqrt{3} - i$$

Allez à : Exercice 56 :

Correction exercice 57 :

1.

$$f(z) = z \Leftrightarrow z(1 - z) = z \Leftrightarrow z(1 - z) - z = 0 \Leftrightarrow z - z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2.

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{1}{2} \right| &= \left| z(1 - z) - \frac{1}{2} \right| = \left| \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - z \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \left| - \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right| \leq \left| \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 \right| + \frac{1}{4} \\ &\leq \left| z - \frac{1}{2} \right|^2 + \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Allez à : Correction exercice 57 :

Correction exercice 58 :

1. Pour tout z_1, z_2 différent de $-i$,

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Leftrightarrow \frac{z_1 - i}{z_1 + i} = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \Leftrightarrow (z_1 - i)(z_2 + i) = (z_2 - i)(z_1 + i) \\ &\Leftrightarrow z_1 z_2 + i z_1 - i z_2 + 1 = z_2 z_1 + i z_2 - i z_1 + 1 \Leftrightarrow 2i z_1 = 2i z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

Donc f est injective.

2.

$$1 - f(z) = 1 - \frac{z - i}{z + i} = \frac{z + i - (z - i)}{z + i} = \frac{2i}{z + i} \neq 0$$

Donc

$$f(z) \neq 1$$

3.

Si $z \in E$ alors $f(z) \neq 1$ ce qui signifie que $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, ce qui montre que

$$f(E) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Si $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ alors il faut montrer qu'il existe $z \in E$ tel que $Z = f(z)$.

$$\begin{aligned} Z = f(z) &\Leftrightarrow Z = \frac{z - i}{z + i} \Leftrightarrow Z(z + i) = z - i \Leftrightarrow Zz + iZ = z - i \Leftrightarrow Zz - z = -iZ - i \Leftrightarrow z(Z - 1) \\ &= -i(Z + 1) \Leftrightarrow z = -i \frac{Z + 1}{Z - 1} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $z \neq -i$, si

$$z = -i \frac{Z + 1}{Z - 1} = -i \Leftrightarrow \frac{Z + 1}{Z - 1} = 1 \Leftrightarrow Z + 1 = Z - 1 \Leftrightarrow 1 = -1$$

Donc z ne peut être égal à $-i$. On a montré que si $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ alors $Z \in f(E)$ cela montre que

$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \subset f(E)$$

On a bien montré l'égalité demandé.

On en déduit que f est surjective et donc bijective.

4.

$$\begin{aligned} 1 - |f(z)|^2 &= 1 - \left| \frac{z - i}{z + i} \right|^2 = 1 - \frac{(z - i)(\bar{z} + i)}{(z + i)(\bar{z} - i)} = \frac{(z + i)(\bar{z} - i) - (z - i)(\bar{z} + i)}{(z + i)(\bar{z} - i)} \\ &= \frac{|z|^2 - iz + i\bar{z} + 1 - (|z|^2 + iz - i\bar{z} + 1)}{|z + i|^2} = \frac{-2iz + 2i\bar{z}}{|z + i|^2} = -\frac{2i(z - \bar{z})}{|z + i|^2} \\ &= -\frac{2i \times 2i \operatorname{Im}(z)}{|z + i|^2} = 4 \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z + i|^2} \end{aligned}$$

5. Si $z \in \mathbb{R}$ alors $\operatorname{Im}(z) = 0$, d'après la question précédente

$$1 - |f(z)|^2 = 0 \Leftrightarrow |f(z)| = 1$$

Ce qui signifie que $f(z) \in \mathcal{U}$

Comme $f(z) \neq 1$, $f(z) \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$

On a montré que

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U} \setminus \{1\}$$

Si $Z \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$ l'image réciproque de Z est $z = -i \frac{Z+1}{Z-1}$, il faut montrer que ce complexe est réel.

$$\begin{aligned} -i \frac{Z+1}{Z-1} - \overline{\left(-i \frac{Z+1}{Z-1}\right)} &= -i \frac{Z+1}{Z-1} - i \frac{\bar{Z}+1}{\bar{Z}-1} = -i \frac{(Z+1)(\bar{Z}-1) + (\bar{Z}+1)(Z-1)}{(Z-1)(\bar{Z}-1)} \\ &= -i \frac{|Z|^2 - Z + \bar{Z} - 1 + |Z|^2 - \bar{Z} + Z - 1}{|Z-1|^2} = -2i \frac{|Z|^2 - 1}{|Z-1|^2} = 0 \end{aligned}$$

Cela montre que $-i \frac{Z+1}{Z-1} \in \mathbb{R}$. On a montré que si $Z \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$ alors il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $Z = f(z)$.

Autrement dit

$$\mathcal{U} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{R})$$

D'où l'égalité demandée.

Allez à : **Exercice 58 :**