

MATHÉMATIQUES

SÉRIES C & E

EXERCICE 1

6pts

Une urne contient 3 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules jaunes, toutes indiscernables au toucher.

- On tire une boule de l'urne une fois et on la remet dans l'urne.
Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir une boule jaune ». 0,5
- On répète n fois ($n \geq 2$) l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne. Les n tirages se déroulent dans les mêmes conditions et sont indépendants.
Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
Calculer la probabilité de tirer exactement k boules jaunes à l'issue des n tirages. 0,5
- On désigne par p_n la probabilité de tirer exactement une boule jaune lors des $n - 1$ premiers tirages et une boule jaune lors du n - ième tirage.
 - Calculer p_2, p_3, p_4 . 0,5
 - Calculer p_n et montrer que $p_n = \frac{n-1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 0,5
- On définit la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ par : $U_n = p_2 + p_3 + p_4 + \dots + p_n$.
 - Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n \geq 2}$. 0,5
 - On admet que pour tout ($n \geq 2$), $U_n \leq 1$; en déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ est convergente (on ne demande pas de calculer ici la limite). 0,5
 - Montrer par récurrence que pour tout ($n \geq 2$), $U_n = 1 - \left(1 + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 0,5
 - Calculer alors la limite de U_n . 0,5
- Dans la division euclidienne de 380 par l'entier naturel n , n non nul, le reste est 8. Déterminer les valeurs possibles du quotient et du diviseur. 1
 - Pour quelles valeurs de n , le nombre $4^{2n} + 2^{2n}$ est-il divisible par 5. 1
 - x est un entier tel que $2x \equiv 1[3]$ et $3x \equiv 4[5]$
 - Montrer que $x = 2 + 3k$ et $x = 3 + 5k'$. 0,5
 - En déduire la forme de x . 0,5

EXERCICE 2

4pts

Dans un plan orienté (P) , on considère un triangle ABC , rectangle et isocèle en A tel que $AB = 4$ cm et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

On désigne par O le milieu de $[BC]$ et E celui de $[AC]$.

Soient r_1 la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

On pose $f = r_1 \circ r_2$.

- Justifier que f est une symétrie centrale. 0,5
 - En décomposant r_1 et r_2 en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis, déterminer le centre de f . 0,5
- Soit $D = \text{bary}((A; 1), (B; -1))$ et $G = \text{bary}((B; 1 - \sqrt{2}), (A; -\sqrt{2}))$.
 - Déterminer les points D et G . 0,5
 - Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des M du plan (P) vérifiant $MA^2 - MB^2 - MC^2 = -12$. 0,5

3. Soit S la similitude plane indirecte qui laisse invariant le point B et transforme A en C . Notons par F le centre de $[CG]$.
- Vérifier qu'il existe une homothétie h de centre B et transforme A en G dont on précisera le rapport. 0,5
 - En déduire les éléments caractéristiques de S . 0,5
4. On note par :
- (c) le cercle de centre C et de rayon 2.
 - I le point d'intersection de (c) et (Γ) dont I se trouve à l'extérieur du carré $ABCD$. 0,5
- Montrer que I est le centre de la similitude plane directe S , de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\pi/2$ et qui transforme C en D . 0,5

PROBLEME

(10 pts)

PARTIE A 3

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x+1)$.

- Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $g'(x) = \frac{x}{x+1}$. 1
- Dresser le tableau de variation de g sur $[0, +\infty[$. 1
- En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$. 1

PARTIE B 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = \frac{x}{x+1}e^x$.

- Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E0) : $y' - y = 0$. 0,35
- Montrer que la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = (x - \ln(x+1))e^x$ est une solution particulière de l'équation (E). 0,35
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0, +\infty[$. 0,35
- Déterminer la solution unique f de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère. 0,35

PARTIE C 5

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x - \ln(x+1))e^x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique : 2 cm).

- Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} + g(x)\right)e^x$. 1
- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis dresser le tableau de variation de f . 1
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (C_f) . 1
- Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera. 0,5
- Tracer la courbe (C_f) (On prendra $\ln 2 \approx 0,69$ et $e \approx 2,71$). 0,5
- On pose : $I = \int_0^1 \ln(x+1) dx$.
 - A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale I . 0,5
 - Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe de la fonction $x \rightarrow f(x)e^{-x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. 0,5

Corrigé de mathématiquesSérie CExercice 1

$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ boules rouges} \\ 3 \text{ boules blanches} \\ 2 \text{ boules jaunes} \end{array} \right\} \Rightarrow 8 \text{ boules dans l'urne}$

- 1) On tire une boule de l'urne et on la remet dans l'urne. Calculons la probabilité de l'événement A : « obtenir une boule jaune »

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad (0,5)$$

- 2) On répète n fois ($n \geq 2$) l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne. Soit $K \in \mathbb{N} / 0 \leq K \leq n$. Calculons la probabilité de tirer exactement K boules jaunes à l'issue des n tirages.

Soit B cet événement

$$\Rightarrow P(B) = C_n^K \left(\frac{1}{4}\right)^K \left(\frac{3}{4}\right)^{n-K} \quad (0,5)$$

- 3) Soit P_n = probabilité de tirer exactement une boule jaune lors des $n-1$ premiers tirages et une boule jaune lors du n ème tirage.

a) Calculons P_2, P_3 et P_4

$$P_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}; \quad P_3 = 2 \times p \times q \times p = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P_3 = \frac{6}{64} = \frac{3}{32} = 0,09375; \quad P_4 = 3 \times p \times q^2 \times p = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow P_4 = \frac{27}{256} = 0,105$$

b) Calculons P_n et montrons que $P_n = \left(\frac{n-1}{9}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\text{On a: } P_n = (n-1) \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{16} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{16}{9} = \left(\frac{n-1}{9}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow P_n = \left(\frac{n-1}{9}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n, \forall n \geq 2 \quad (0,5)$$

(2)

4) Soit $U_n = P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n, \forall n \geq 2 \Rightarrow U_n = \sum_{i=2}^n P_i$

a) Étudions la monotonie de (U_n)

On a: $U_{n+1} = P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n + P_{n+1}$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = P_{n+1} = \frac{n}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \geq 2, U_{n+1} - U_n > 0} \Rightarrow (U_n) \text{ est strictement croissante} \quad (0,5)$$

b) On admet, $\forall n \geq 2, U_n \leq 1$. Démontrons - en que (U_n) est convergente

(U_n) étant croissante et majorée par 1, alors (U_n) est convergente (0,5)

c) Montrons par récurrence que, $\forall n \geq 2, U_n = 1 - \left(1 + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n$

• $n=2 \Rightarrow U_2 = 1 - \left(1 + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{5}{3} \times \frac{9}{16} = 1 - \frac{45}{48} \Rightarrow U_2 = \frac{3}{16} = P_2$

• Supposons que, $\forall n \geq 2, U_n = 1 - \left(1 + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n$

• Vérifions au rang $n+1$: $U_{n+1} = P_2 + P_3 + \dots + P_n + P_{n+1} = 1 - \left(\frac{4}{3} + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$$\Rightarrow U_{n+1} = P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n + P_{n+1} = U_n + P_{n+1}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 1 - \left(1 + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{3}{4}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{n}{3}\right) \times \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + \frac{n}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$U_{n+1} = 1 - \left(\frac{4}{3} + \frac{4n}{9} - \frac{n}{9}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 1 - \left(\frac{4}{3} + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

D'où $\boxed{\forall n \geq 2, U_n = 1 - \left(1 + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ (0,5)

d) Calculons la limite de (U_n)

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(1 + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 1} \quad (0,5)$$

5) On a: $380 = nq + 8$ avec $8 < n$

Déterminons les valeurs possibles du quotient et du diviseur

$$380 = nq + 8 \Rightarrow nq = 372 = 2^3 \times 3 \times 31$$

(3)

$$\Rightarrow n = \{12; 31; 62; 93; 124; 156; 372\}$$

$$\text{et } g = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; 31\}$$



b) Valeurs de n pour lesquelles $4^{2n} + 2^{2n}$ est divisible par 5
On a: $4^{2n} + 2^{2n} \equiv 0 [5]$

$$\Rightarrow 4^{2n} + 2^{2n} = 16^n + 4^n \text{ or } 16 \equiv 1 [5] \text{ et } 4 \equiv -2 [5]$$

$$\Rightarrow 4^{2n} + 2^{2n} \equiv 0 [5] \Leftrightarrow 4^{2n} + 2^{2n} \equiv 1 + (-2)^n [5]$$

$$\Leftrightarrow 1 + (-2)^n \equiv 0 [5]$$

Si n est pair $\Rightarrow 1 + (-2)^n = 2$ impossible

Si n est impair $\Rightarrow 1 + (-2)^n = 0$

$$\text{Donc } n = \{2; 3; 5; 7; 9; \dots\}$$

$$\text{ou } n = 2k+2, k \in \mathbb{N}$$



c) On a: $2x \equiv 1 [3]$ et $3x \equiv 4 [5]$

* Montrons que $x = 2 + 3k$ et $x = 3 + 5k'$

$$\bullet 2x \equiv 1 [3] \Rightarrow 4x \equiv 2 [3] \text{ or } 4 \equiv 1 [3]$$

$$\Rightarrow x \equiv 2 [3] \Rightarrow x = 2 + 3k$$

$$\bullet 3x \equiv 4 [5] \Rightarrow 6x \equiv 8 [5] \text{ or } 6 \equiv 1 [5] \text{ et } 8 \equiv 3 [5]$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 [5] \Rightarrow x = 3 + 5k'$$



* Résolution en x

$$\begin{cases} x = 2 + 3k \\ x = 3 + 5k' \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3k - 5k' = 1$$

$$\Rightarrow 3k - 5k' = 3 \times 2 - 5 \times 1$$

$$\Rightarrow 3(k-2) = 5(k'+1)$$

$$3 \wedge 5 = 1 \Rightarrow \begin{cases} k-2 = 5m \\ k'+1 = 3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5m+2 \\ k' = 3m+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3(5m+2) \\ x = 3 + 5(3m+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 15m + 8, m \in \mathbb{Z}$$

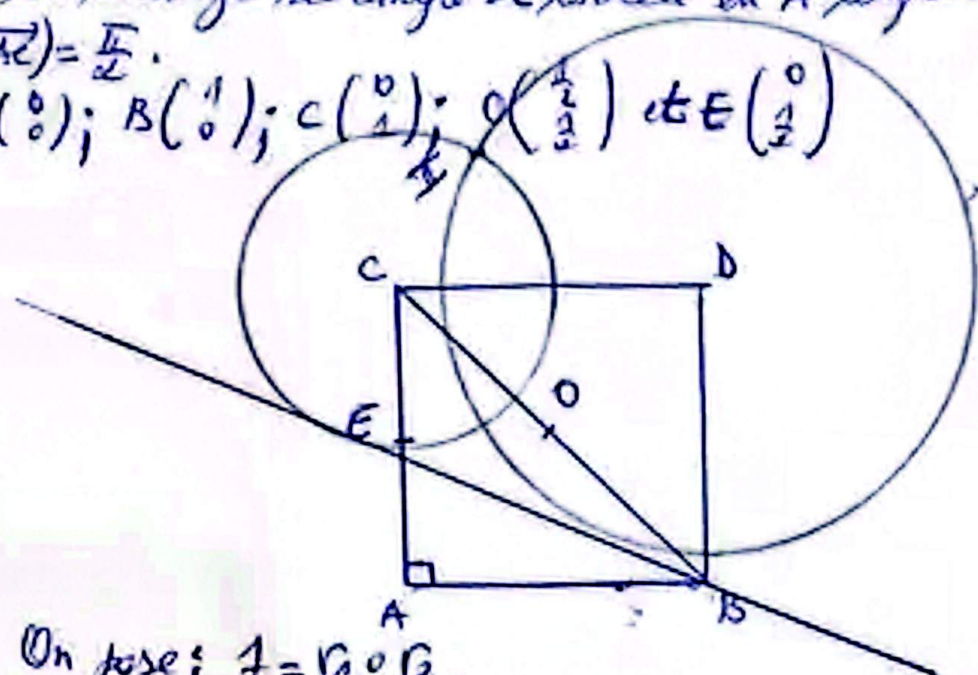


Exercice 2

(4)

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que : $AB=4$
et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit $A(0)$; $B(1)$; $C(\frac{0}{1})$; $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $E(\frac{0}{2})$



(0,75)

On pose : $f = r_2 \circ r_1$

1) a) Justifier que f est une symétrie centrale

On a : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow f$ est une symétrie centrale (0,5)

b) Déterminer le centre de f

On a : $r_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et $r_2 = S_A \circ S_{(OA)}$

$$\Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(OA)} \circ S_A = r_1 \circ r_2 = S_{(AC)} \circ S_{(OE)} \Rightarrow (AC) \cap (OE) = E$$

NB: or : $r_2(A) = B$ et $r_1(B) = C \Rightarrow f(A) = C \Rightarrow \vec{AL} = -\vec{LC}$

$$\Rightarrow L \text{ est milieu de } [AC] \Rightarrow f(L) = L \Rightarrow \boxed{L = E} \quad (0,5)$$

$$\text{NB: } r_1: z_1 = iz; \quad r_2: z_2 = iz + 1 \Rightarrow f: z_3 = -z + i \Rightarrow z_E = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}i \Rightarrow E(\frac{0}{2})$$

2) Soit $D = \text{bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$ et $G = \text{bar}\{(B, 1-\sqrt{2}); (A, -\sqrt{2})\}$

a) Déterminer D et G

$$\bullet \quad \boxed{\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}}$$

$$\bullet \quad \boxed{\vec{AG} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \vec{AB} = \frac{3-\sqrt{2}}{7} \vec{AB}} \quad (0,5)$$

b) Déterminons l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que: (5)

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -12$$

$$\text{Soit } D = \text{car } \{(A, 1); (B, -1); (C, -1)\}$$

$$\Rightarrow -MD^2 + f(D) = -12 \text{ avec } f(D) = \frac{-AB^2 - AC^2 + BC^2}{1-1-1} = 0$$

$$\Rightarrow MD^2 = 12 \Rightarrow MD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad (0,5)$$

Donc (Γ) est le cercle de centre D et de rayon $R = 2\sqrt{3}$

3) Soit $\bar{S}$ la similitude indirecte $\bar{S}(A) = A$ et $\bar{S}(C) = C$.

a) Montrons que'il existe une homothétie h de centre B qui transforme A en C

$$\text{On a: } (1-\sqrt{2})\vec{BC} - \sqrt{2}\vec{BA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\vec{BA} \Rightarrow K = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \quad (0,5)$$

b) D'édousons les éléments caractéristiques de $\bar{S}$

$\bar{S}$ est la SPI de centre B , de rapport $K = \frac{BC}{AB} = \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$ et d'axe la bissectrice de l'angle $(\vec{BA}, \vec{BC})$ (0,25)

4) On note $(\mathcal{C})$ le cercle de centre C et de rayon 2 et (Γ) le cercle de centre D et de rayon $2\sqrt{3}$

Montrons que le point I est le centre de la similitude directe S de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et qui transforme C en D .

$$\text{On a: } \begin{cases} S(I) = I \\ S(C) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ID = \sqrt{3} IC \\ (\vec{IC}, \vec{ID}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (0,5)$$

$$I = (\mathcal{C}) \cap (\Gamma), \quad I \in (\mathcal{C}) \text{ et } I \in (\Gamma)$$

$$IC = 2 \text{ et } ID = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{ID}{IC} = \sqrt{3}$$

De plus, ICD est un triangle rectangle en I , alors:

$$(\vec{IC}, \vec{ID}) = \frac{\pi}{2} \quad (0,25)$$

D'où I est bien le centre de S .

Problème

(6)

Partie A: Soit $g(x) = x - \ln(x+1)$, $\forall x \in [0; +\infty[$

1) Montrons que, $\forall x \geq 0$, $g'(x) = \frac{x}{x+1}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a: $g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1}$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{x}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R}_+} \quad (0,25) \quad (1)$$

2) Dressons le tableau de variation de g

$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) > 0$, alors g croît sur $\mathbb{R}_+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty \text{ et } g(0) = 0$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	$+\infty$

(1)

3) Décidons - en que, $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq 0$

g est minorée sur $\mathbb{R}_+$ par $g(0) = 0$, alors:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq 0} \quad (1)$$

Partie B: Soit l'équation différentielle (E): $y' - y = \frac{x}{x+1} e^x$

1) Résolvons l'équation différentielle (E₀): $y' - y = 0$

$$y' - y = 0 \Rightarrow \boxed{y(x) = k e^x, k \in \mathbb{R}} \quad (0,25)$$

2) Montrons que la fonction $h(x) = (x - \ln(x+1)) e^x$ est une solution de (E)

$$h'(x) = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) e^x + (x - \ln(x+1)) e^x = e^x - \frac{e^x}{x+1} + x e^x - e^x \ln(x+1)$$

$$\Rightarrow h'(x) - h(x) = e^x - \frac{1}{x+1} e^x + x e^x - e^x \ln(x+1) - (x - \ln(x+1)) e^x$$

$$\Rightarrow h'(x) - h(x) = e^x - \frac{1}{x+1} e^x = \frac{x e^x + e^x - e^x}{x+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{h'(x) - h(x) = \frac{x}{x+1} e^x} \Rightarrow h \text{ est une solution de (E)} \quad (0,25)$$

3) Dédudions-en l'ensemble de solutions de (E) (7)

$$f(x) = K e^x + (x - \ln(x+1)) e^x, K \in \mathbb{R} \quad (0,25)$$

4) Déterminons la solution de (E) telle que $f(0) = 0$

$$f(0) = 0 \Rightarrow K + 0 = 0 \Rightarrow K = 0$$

$$\text{D'où } f(x) = (x - \ln(x+1)) e^x \quad (0,25)$$

Partie C: Soit $f(x) = (x - \ln(x+1)) e^x, \forall x \in [0; +\infty[$

1) Montrons que, $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = (\frac{x}{x+1} + g(x)) e^x$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a:

$$f'(x) = (1 - \frac{1}{x+1}) e^x + (x - \ln(x+1)) e^x$$

$$= (1 - \frac{1}{x+1} + x - \ln(x+1)) e^x$$

$$f'(x) = (\frac{x}{x+1} + x - \ln(x+1)) e^x = (\frac{x}{x+1} + g(x)) e^x, \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

2) Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et dressons le tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x+1)) e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) (\frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}) e^x = +\infty(+\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) > 0$, et f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

3) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprétons graphiquement le résultat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x+1)) \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) (\frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}) \frac{e^x}{x} \quad (1)$$

$$= +\infty(1-0) \times (+\infty) = +\infty$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow (C_f)$ admet une branche parabolique de direction (OJ) au voisinage de $+\infty$

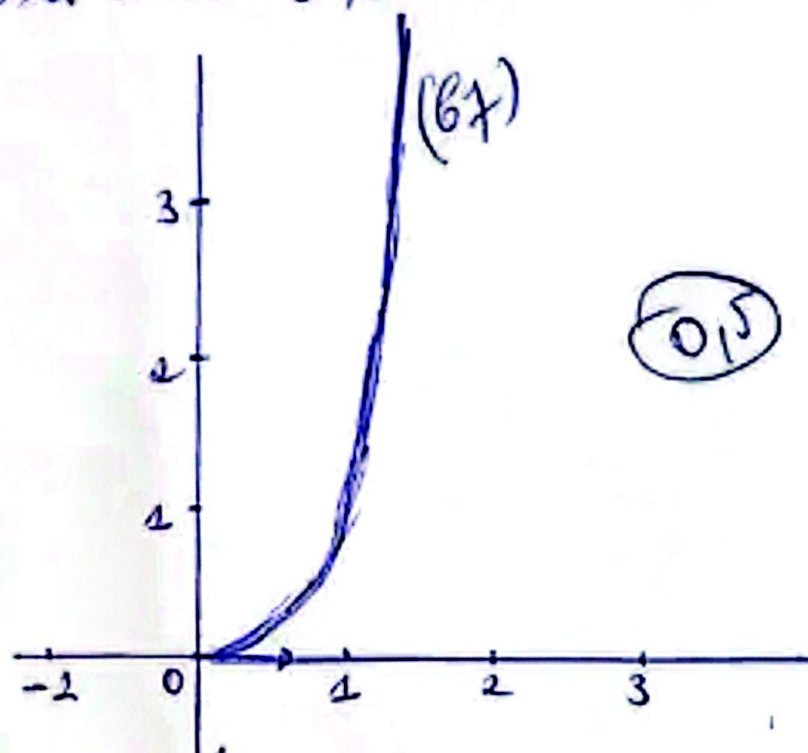
4) Montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+ \rightarrow]-\infty, 1]$

(8)

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+ =]-\infty, 1]$

(0,5)

5) Traçons la courbe (C_f)



(0,5)

6) On pose : $I = \int_0^2 \ln(x+1) dx$

a) Calculons I

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = [x \ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx = \ln 2 - \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \quad (0,5)$$

$$= \ln 2 - [x - \ln(x+1)]_0^2 = \ln 2 - 2 + \ln 2 \Rightarrow \boxed{I = 2\ln 2 - 2}$$

b) Calculons l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de la fonction $x \mapsto f(x) = x - \ln(x+1)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x - \ln(x+1)) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \ln(x+1) + x\right) \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 4\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right) \text{ cm}^2 = (6 - 8\ln 2) \text{ cm}^2} \quad (0,5)$$